論 文 の 内 容 の 要 旨

論文題目　退化した流れに対する $\mathrm{KM_2O}$- ランジュヴァン方程式論

氏 名　松 浦 真 也

$\mathrm{KM_2O}$- ランジュヴァン方程式論は計量ベクトル空間内の流れの理論であり, 時系列解析に用いられる. 本研究では, 流れが退化している場合について, ウエイト変換の観点から解析し, 応用としてマサニ・ウィーナーの非線形予測問題を解決した. さらに, 時系列の定常性の判定に際し, ウエイト変換の有効性を検証した.

まず, マサニ・ウィーナーの非線形予測問題の概略を述べる. $\mathbf{X} = (X(n); n \in \mathbf{Z})$ を次を満たす確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の 1 次元確率過程とする:

(GSS)　$\mathbf{X}$ は強定常性をもつ;

(GB)　$\mathbf{X}$ は有界である. すなわち, $|X(n)(\omega)| \le c$ $(n \in \mathbf{Z}, \mathrm{a.s.}\omega \in \Omega)$ を満たす正の数 c が存在する;

(GM)　$E(X(n)) = 0 \qquad (n \in \mathbf{Z})$;

(GP)　任意の有限個数の整数 $k_j \in \mathbf{Z}$ $(1 \le j \le p,\ k_1 < k_2 < \cdots < k_p)$ に対し, 有限次元確率分布 $P_{t(X(k_1), X(k_2), \ldots, X(k_p))}$ の支えは正のルベーグ測度をもつ.

確率過程 $\mathbf{X}$ の非線形予測子とは条件付期待値 $E(X(n+p)|\mathcal{B}_{-\infty}^{n}(\mathbf{X}))$ $(n \in \mathbf{Z}, p \in \mathbf{N})$ のことであり, これを具体的に求めるのがマサニ・ウィーナーの非線形予測問題である. ここで, $\mathcal{B}_{-\infty}^{n}(\mathbf{X}) \equiv \sigma(X(k); -\infty < k \le n)$ とする. 各確率変数 $X(n)$ を $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の元とみなすと, 非線形予測子は, $X(n+p)$ を $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の部分空

間 $\mathbf{N}^n_{-\infty}(\mathbf{X})$ に射影して得られるベクトル $P_{\mathbf{N}^n_{-\infty}(\mathbf{X})}X(n+p)$ に一致する．ただし，$\mathbf{N}^n_{-\infty}(\mathbf{X}) \equiv L^2(\Omega, \mathcal{B}^n_{-\infty}(\mathbf{X}), P)$ とする．マサニ・ウィーナーは 1959 年の論文で，上述の問題を数学的には解決したが，条件 (GB),(GP) が厳しいこと，非線形予測子を具体的に求めるアルゴリズムが得られなかったことなどから，応用上は不十分な結果であった．条件 (GB) は，ドブルーシン・ミンロスが 1977 年の論文で用いた条件

(GE)　任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し，$E(\exp\{\lambda X(n)\}) < \infty$ $(|\lambda| \le \lambda_0(n))$ を満たす正の定数 $\lambda_0(n)$ が存在する

で緩和される．また，岡部・大塚は 1995 年の論文で，マサニ・ウィーナーと同じ条件のもと，非退化な流れに対する KM_2O- ランジュヴァン方程式論を用いて非線形予測子を計算するアルゴリズムを求めている．条件 (GP) を外し，非線形予測問題を完全に解決するには，退化した流れに対する KM_2O- ランジュヴァン方程式論が必要であり，これを構築するのが本研究の主題である．以下で詳しく述べる．

$\mathbf{X} = (X(n); 0 \le n \le N)$ を計量ベクトル空間 $(W, (\star, *))$ 内の d 次元の流れとする．即ち，$X(n) = {}^t(X_1(n), X_2(n), \ldots, X_d(n))$, $X_j(n) \in W$ とする．2 乗可積分な確率変数からなる確率過程は，流れとみなすことができる．$\{X_j(n); 1 \le j \le d, 0 \le n \le N\}$ が W 内で一次従属であるとき，流れ $\mathbf{X}$ は退化しているという．$X(n)$ の各成分を空間 $\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X}) \equiv [\{X_j(k); 1 \le j \le d, 0 \le k \le n-1\}]$ に射影することにより，揺動流 $\nu_+(\mathbf{X}) = (\nu_+(\mathbf{X})(n); 0 \le n \le N)$ を抜き出す:

$$\nu_+(\mathbf{X})(n) \equiv X(n) - P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})}X(n) \qquad (1 \le n \le N).$$

$P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})}X(n)$ の各成分は，$X_j(k)$ の一次結合として表現できる．したがって，次を満たす行列関数 $\gamma_+ = (\gamma_+(n,k); 0 \le k < n \le N)$ が存在する:

$$X(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n,k)X(k) + \nu_+(\mathbf{X})(n) \qquad (1 \le n \le N).$$

上の関係式を満たす γ_+ は一般には一意的でないので，これらの全体を $\mathcal{LMD}_+(\mathbf{X})$ とおく．このとき，$\mathcal{LMD}_+(\mathbf{X})$ の元の一意性に関して，次の定理が成り立つ．

<u>定理 1</u>

(i) 流れ $\mathbf{X}$ が非退化ならば $\sharp(\mathcal{LMD}_+(\mathbf{X})) = 1$.

(ii) $\mathcal{LMD}_+(\mathbf{X})$ の元で，ノルム $||\gamma_+|| \equiv (\sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^d \gamma_{+pq}(n,k)^2)^{1/2}$ が最小となるものが一意的に定まる．

$\mathbf{X}$ が非退化のとき, $\mathcal{LMD}_+(\mathbf{X})$ の唯一の元を $\gamma_+(\mathbf{X})$ と書く. 一般に, $\mathcal{LMD}_+(\mathbf{X})$ のノルム最小元を $\gamma_+^0(\mathbf{X})$ と書き, 流れ $\mathbf{X}$ に付随する $\mathrm{KM_2O}$-ランジュヴァン散逸行列関数と呼ぶ. そして, $\gamma_+^0(\mathbf{X})$ を用いた流れ $\mathbf{X}$ の時間発展を記述する方程式

$$X(n) = -\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_+^0(\mathbf{X})(n,k)X(k) + \nu_+(\mathbf{X})(n) \qquad (1 \le n \le N)$$

を $\mathbf{X}$ に付随する $\mathrm{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式と呼ぶ.

$\gamma_+^0(\mathbf{X})$ を具体的に求めるために, 任意の正数 w に対して流れ $\mathbf{X}^w = (X^w(n); 0 \le n \le N)$ を

$$X^w(n) \equiv X(n) + w\,\xi(n) \qquad (0 \le n \le N)$$

で定義する (ウエイト変換). ここで, $\boldsymbol{\xi} = (\xi(n); 0 \le n \le N)$ は $\mathbf{X}$ と直交する非退化な d 次元の流れである. ウエイト変換に関する以下の定理は重要である.

<u>定理 2</u>

(i) 流れ $\mathbf{X}^w$ は非退化 $(w > 0)$.

(ii) 極限 $\gamma_+^0(\mathbf{X};\boldsymbol{\xi})(n,k) \equiv \lim_{w\to 0}\gamma_+(\mathbf{X}^w)(n,k)$ が存在し, $\gamma_+^0(\mathbf{X};\boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{LMD}_+(\mathbf{X})$.

(iii) $\boldsymbol{\xi}$ がホワイトノイズ流, 即ち, $(\xi(m), {}^t\xi(n)) = \lambda\delta_{mn}I$ を満たす $\lambda > 0$ が存在するとき, $\gamma_+^0(\mathbf{X};\boldsymbol{\xi}) = \gamma_+^0(\mathbf{X})$.

<u>定理 3</u>　$\dim W > (N+1)d$ とし, $\boldsymbol{\xi} = (\xi(n); 0 \le n \le N)$ を W 内の非退化な d 次元の流れとする. このとき, $(\mathbf{M}_0^N(\boldsymbol{\xi}))^\perp$ 内の任意の d 次元の流れ $\mathbf{X} = (X(n); 0 \le n \le N)$ に対して $\gamma_+^0(\mathbf{X};\boldsymbol{\xi}) = \gamma_+^0(\mathbf{X})$ が成り立つなら, $\boldsymbol{\xi}$ はホワイトノイズ流である.

以上が, 退化した流れに対する $\mathrm{KM_2O}$-ランジュヴァン方程式論の骨格である. これを用いて冒頭のマサニ・ウィーナーの非線形予測問題を解いていく. まず, 流れ $\mathbf{X}$ に対する線形予測子 $P_{\mathbf{M}_0^n(\mathbf{X})}X(n+p)$ を求める. そのために, 行列関数 $Q_+(\mathbf{X}) = (Q_+(\mathbf{X})(m,n;k); 0 \le k \le n < m \le N)$ を次で定める:

$$\begin{cases} Q_+(\mathbf{X})(n+1,n;k) \equiv -\gamma_+^0(\mathbf{X})(n+1,k), \\ Q_+(\mathbf{X})(m,n;k) \equiv -\sum_{j=n+1}^{m-1}\gamma_+^0(\mathbf{X})(m,j)Q_+(\mathbf{X})(j,n;k) - \gamma_+^0(\mathbf{X})(m,k). \end{cases}$$

このとき, 線形予測子は次で与えられる.

<u>定理 4</u>　整数 $n, p\,(0 \le n \le N-1, 1 \le p \le N-n)$ に対して, 次が成り立つ:

$$P_{\mathbf{M}_0^n(\mathbf{X})}X(n+p) = \sum_{k=0}^{n} Q_+(\mathbf{X})(n+p,n;k)X(k).$$

次に, 時間域が局所的な確率過程の非線形予測子を求める. 1次元確率過程 $\mathbf{X} = (X(n); 0 \leq n \leq N)$ が次を満たすとする:

(E) 任意の $n\,(0 \leq n \leq N)$ に対し, $E(\exp\{\lambda X(n)\}) < \infty\ (|\lambda| \leq \lambda_0(n))$ を満たす正の定数 $\lambda_0(n)$ が存在する;

(M) $E(X(n)) = 0 \qquad (0 \leq n \leq N)$.

条件 (E) により, ワイヤストラスの多項式近似定理を用いて, 次を満たす多次元確率過程の列 $\tilde{\mathbf{X}}^{(q)} = (\tilde{X}^{(q)}(n); 0 \leq n \leq N)\ (q \in \mathbf{N})$ を構成することができる.

(i) $\tilde{\mathbf{X}}^{(q)}\ (q \in \mathbf{N})$ の第1成分は $\mathbf{X}$.

(ii) $\mathbf{N}_0^n(\mathbf{X}) = [\{1\}] \oplus [\bigcup_{q=1}^{\infty} \mathbf{M}_0^n(\tilde{\mathbf{X}}^{(q)})]\ (0 \leq n \leq N)$.

確率過程 $\tilde{\mathbf{X}}^{(q)}$ は, ベクトル空間内の流れとみなせるが, この流れは退化している. 定理4を流れ $\tilde{\mathbf{X}}^{(q)}$ に適用して, 次の定理を得る.

定理 5　整数 $n, p\ (0 \leq n \leq N-1, 1 \leq p \leq N-n)$ に対して, 次が成り立つ:

$$P_{\mathbf{N}_0^n(\mathbf{X})} X(n+p) = \lim_{q \to \infty} \sum_{j=1}^{d_q+1} \sum_{k=0}^{n} Q_+(\tilde{\mathbf{X}}^{(q)})(n+p, n; k)_{1j} \tilde{X}_j^{(q)}(k).$$

ここで, d_q は q に依存して定まる整数である. もとの確率過程 $\mathbf{X}$ が強定常性を満たすときには, ユニタリ演算子を用いることにより, 次が得られる.

定理 6　整数 $m, n, p\ (0 \leq m \leq n \leq N-1, 1 \leq p \leq N-n)$ に対して, 次が成り立つ:

$$P_{\mathbf{N}_m^n(\mathbf{X})} X(n+p) = \lim_{q \to \infty} \sum_{j=1}^{d_q+1} \sum_{k=m+\sigma(j-1)}^{n} Q_+(\tilde{\mathbf{X}}^{(q)})(n-m+p, n-m; k-m)_{1j} \tilde{X}_j^{(q)}(k).$$

ただし, $\sigma(j)$ は j に依存して定まる自然数である.

最後に, 条件 (GSS),(GE),(GM) を満たす時間域が大域的な1次元確率過程 $\mathbf{X} = (X(n); n \in \mathbf{Z})$ を考える. このとき, 局所的な確率過程に対する場合と同様にして, $\mathbf{N}_{-\infty}^n(\mathbf{X})$ の生成系を与える確率過程の列 $\mathbf{X}^{(q)} = (X^{(q)}(n); n \in \mathbf{Z})\ (q \in \mathbf{N})$ が構成でき, 次の定理により, マサニ・ウィーナーの非線形予測問題が解決される.

定理 7　整数 $n, p (n \in \mathbf{Z}, p \in \mathbf{N})$ に対して, 次が成り立つ:

$$P_{\mathbf{N}_{-\infty}^n(\mathbf{X})} X(n+p) = \lim_{N, q \to \infty} \sum_{k=n-N}^{n} \sum_{j=1}^{d_q+1} Q_+(\mathbf{X}^{(q)})(N+p, N; k-n+N)_{1j} X_j^{(q)}(k).$$

退化した流れに対する $\mathrm{KM_2O}$- ランジュヴァン方程式論は, 非線形予測問題のみならず, 時系列の因果解析や決定性解析に対しても重要な役割を果たす.

本研究の最後に，ウエイト変換に関するシミュレーションを行なった．力学系から得られる退化した時系列に対して，KM_2O- ランジュヴァン方程式論に基づく定常性のテスト –Test(S)– を行なうと，正しい判定結果が得られない場合がある．これは，Test(S) が非退化な流れに対する理論に基づいていることによる．このとき，ウエイト変換を用いて，退化した時系列を非退化な時系列に変換してから Test(S) を行なうことの有効性をシミュレーションにより確かめた．