論文の内容の要旨

論文題目：閉多様体の変換群の研究

氏名： 呂志

要旨

この論文は閉多様体の上の変換群についての三つの考察からなる。広義 Smith 予想、閉多様体の上の $(Z_2)^k$-作用と半線型のホモロジー G-球面及びこれらの同変慣性群である。一般に、閉多様体の変換群の研究は、位相幾何学のほとんど全ての理論と方法を必要とする。我々の研究では、主に以下の理論が重要である。結び目の理論、同変同境 (cobordism) 理論、同変手術理論、特性類の理論、代数理論と表現論である。また、符号 (Signature)、Arf 不変量と特性数も使用する。論文は以下の三つの章からなる。

第一章では、余次元が 1 を超える広義 Smith 予想について議論する。これは、$l-h>1$ 及び $l>3$ の条件の下で、不動点集合が従順 (tame) な非自明な結び目の h 次元球面 S^h となるような l 次元球面 S^l 上の周期変換は存在しないという予想である。これは本来の Smith 予想（すなわち、$l=3$ 及び $h=1$）の自然な一般化である。本来の Smith 予想は、トポロジカルカテゴリーと PL カテゴリーではいくらかの特殊の場合を除いて成り立たず、可微分カテゴリーでは成り立つ、ということが分かっている。本章の目的は、Brieskorn 多様体を使用することにより、広義 Smith 予想に対する明示的な反例を与えることである。このようなアイディアは Davis により示されている。$l-h>1$ 及び $l>3$ の条件の下で、球面 S^h の球面 S^l への埋め込みの状況により、広義 Smith 予想を、余次元が 2 である場合と余次元が 2 を超える場合に分けて議論する。

余次元が 2 である広義 Smith 予想に対しては、Giffen、Sumners と Gordon は、それぞれ異なった方法で、どんなカテゴリー（すなわち、トポロジー、PL と可微分）でも、成立しないことを証明している。この章では、Brieskorn 球面を使用することにより、 トポロジーと可微分のカテゴリーにおいて、5 を超える奇数次元の Brieskorn 球面について余次元が 2 の広義 Smith 予想に対する明示的な反例を与える。

定義.　Brieskorn 多様体 $\Sigma_{\mathbf{a}}=\Sigma(a_1,\cdots,a_n)$ は、$f^{-1}(0)$ と中心が原点である半径が十分小さい球面 S_ε の横断的交叉である。ここで、$f:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$ は、1 を超える

整数 a_k に対して、

$$f(z_1, \cdots, z_n) = z_1^{a_1} + \cdots + z_n^{a_n}$$

により定義される複素多項式関数である。

Brieskorn 多様体の代数的な定義から、$\Sigma_{\mathbf{a}} = \Sigma(a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n)$ には常に自然な周期 a_k の微分同相 T_k で、その不動点集合が $\Sigma(a_1, \cdots, \hat{a}_k, \cdots, a_n)(= \Sigma_{\hat{\mathbf{a}}_k})$ となるものが存在する。先ず、我々は $\Sigma_{\hat{\mathbf{a}}_k}$ が $\Sigma_{\mathbf{a}}$ 内で非自明な結び目であることを示す以下の定理を証明する。

定理 A. $1 \leq k \leq n$ 及び $n \geq 4$ という条件の下で、補空間 $\Sigma_{\mathbf{a}} - \Sigma_{\hat{\mathbf{a}}_k}$ は S^1 のホモトピー 型を持たない。

トポロジカルカテゴリーでは、Brieskorn によって与えられた「$\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ の言葉で、$\Sigma_{\mathbf{a}}$ が位相的球面になることを決定する」簡単な方法を用い、$\Sigma_{\mathbf{a}}$ とある k に対し、$\Sigma_{\hat{\mathbf{a}}_k}$ が位相的球面になる特殊な $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ を選ぶことにより、広義 Smith 予想に対する明示的な反例を得る。

定理 B. $m \geq 2, n \geq 5$ を満たす整数 m, n を取る。この時、$\mathbf{a} = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{n-3}, 2m-1, 2m+1, m)$ に対し、Brieskorn 多様体 $\Sigma_{\mathbf{a}}$ と $\Sigma_{\hat{\mathbf{a}}_n}$ はそれぞれ $2n-3$ 次元と $2n-5$ 次元の位相的球面になる。従って、$\Sigma_{\mathbf{a}}$ の上の $\mathbf{Z}_m$-作用 T_n の不動点集合 $\Sigma_{\hat{\mathbf{a}}_n}$ は $\Sigma_{\mathbf{a}}$ において非自明な結び目である。

可微分のカテゴリーでは、多様体の符号に対する Hirzebruch と Mayer の計算方法を改良することにより、広義 Smith 予想に対する明示的な反例を得る。

定理 C. 整数 m, n が $m \geq 2$ かつ $n \geq 5$ を満たすと仮定する。

(i). $\mathbf{a} = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{2l-1}, 2m\sigma_l + 1, 2m\sigma_l - 1, m)$ に対し、Brieskorn 多様体 $\Sigma_{\mathbf{a}}$ と $\Sigma_{\hat{\mathbf{a}}_{2l+2}}$ はそれぞれ $4l+1$ 次元と $4l-1$ 次元の標準的な球面に微分同相になる。従って、$\Sigma_{\mathbf{a}}$ の上の $\mathbf{Z}_m$-作用 T_{2l+2} の不動点集合 $\Sigma_{\hat{\mathbf{a}}_{2l+2}}$ は $\Sigma_{\mathbf{a}}$ において可微分な非自明な結び目である。

(ii). $\mathbf{a} = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{2l-2}, 2m\sigma_l + 1, 2m\sigma_l - 1, m)$ に対し、Brieskorn 多様体 $\Sigma_{\mathbf{a}}$ と $\Sigma_{\hat{\mathbf{a}}_{2l+1}}$ はそれぞれ $4l-1$ 次元と $4l-3$ 次元の標準的な球面に微分同相になる。従って、$\Sigma_{\mathbf{a}}$ の上の $\mathbf{Z}_m$-作用 T_{2l+1} の不動点集合 $\Sigma_{\hat{\mathbf{a}}_{2l+1}}$ は $\Sigma_{\mathbf{a}}$ において可微分な非自明な結び目である。

ここで、σ_l は整数 $2^{2l+1}(2^{2l-1}-1) \cdot \mathrm{numerator}(4B_l/l)$ 、及び B_l は l 番目の Bernoulli 数である。

次に、余次元が 2 を超える広義 Smith 予想を考える。この場合は、球面 S^h を球面 S^l に埋め込む結び目の理論と直接に関係がある（ここで、$l-h > 2$ かつ $l > 3$ である）。「もし $l-h > 2$ かつ $l > 3$ ならば、トポロジカルカテゴリーと PL カテゴリーでは、球面 S^h の球面 S^l への埋め込みについて、非自明な結び目は存在しな

い。また、$2l > 3(h+1)$ ならば、可微分のカテゴリーでは、球面 S^h の球面 S^l への埋め込みについても、非自明な結び目は存在しない。」ということがよく知られている。従って、球面 S^h を不動点集合とする S^l の周期変換は存在すれば、広義 Smith 予想は、上に述べた l と h の範囲内で、成立する。しかし、$2h+4 < 2l \leq 3(h+1)$ の時、Haefliger と Levine は、「可微分のカテゴリーでは、球面 S^h を球面 S^l に非自明な結び目として埋め込むことは可能である」とことを示した。さらに、Haefliger と Levine は、「$2h+4 < 2l \leq 3(h+1)$ かつ $h+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ の条件の下で、球面 S^h を球面 S^l に非自明な結び目としての埋め込みは、可微分のカテゴリーでは、無数に存在する。」ということを証明した。従って、我々は、可微分のカテゴリーにおいて、$2h+4 < 2l \leq 3(h+1)$ と $h+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ の条件の下で広義 Smith 予想を考察する。Brieskorn 多様体の代数的性質に基づいて、Brieskorn 多様体の上の Z_m-作用が構成される。そして、球面 S^h の球面 S^l への結び目としての埋め込みに関するLevine の仕事により、$2h+4 < 2l \leq 3(h+1)$ と $h+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ の条件を満たすには、h 次元のホモトピー球面の球面 S^l への埋め込みが非自明かを判定する不変量 Λ が定義される（標準的な球面 S^h の球面 S^l への埋め込みに対して、類似な不変量 Δ も定義される）。さらに、Brieskorn 球面と以上の不変量を利用して、2 を超える偶数 $l-h$、奇数 l、$2l \leq 3(h+1)$ と $h+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ に対して、広義 Smith 予想に対する明示的な反例を与えることができる。具体の結果は下に述べられる。

定理 D. (i). 正整数 r, k, m が $m > 1$ 及び $k+1 \leq r \leq [\frac{3k-1}{2}]$ を満たすとする。$\mathbf{a} = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{2k-1}, 2m\sigma_k+1, 2m\sigma_k-1, \underbrace{m, \cdots, m}_{2r-2k+1})$ と $\mathbf{a}' = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{2k-1}, 2m\sigma_k+1, 2m\sigma_k-1)$ に対し、$\Sigma_{\mathbf{a}}^{4r+1}$ と $\Sigma_{\mathbf{a}'}^{4k-1}$ はそれぞれ標準的な球面に微分同相である。さらに、$\Sigma_{\mathbf{a}}^{4r+1}$ 上には、非自明な結び目 $\Sigma_{\mathbf{a}'}^{4k-1}$ が不動点集合になる $\mathbf{Z}_m$-作用が存在する。

(ii). 正整数 r, k, m が $m > 1$ 及び $k+1 \leq r \leq [\frac{3k}{2}]$ を満たすとする。$\mathbf{a} = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{2k-1}, 2m\sigma_k+1, 2m\sigma_k-1, \underbrace{m, \cdots, m}_{2r-2k})$ と $\mathbf{a}' = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{2k-1}, 2m\sigma_k+1, 2m\sigma_k-1)$ に対し、整数 a が存在して、$\underbrace{\Sigma_{\mathbf{a}}^{4r-1}\sharp\cdots\sharp\Sigma_{\mathbf{a}}^{4r-1}}_{a}$ と $\underbrace{\Sigma_{\mathbf{a}'}^{4k-1}\sharp\cdots\sharp\Sigma_{\mathbf{a}'}^{4k-1}}_{a}$ はそれぞれ標準的な球面に微分同相である。さらに、$\underbrace{\Sigma_{\mathbf{a}}^{4r-1}\sharp\cdots\sharp\Sigma_{\mathbf{a}}^{4r-1}}_{a}$ 上には、非自明な結び目 $\underbrace{\Sigma_{\mathbf{a}'}^{4k-1}\sharp\cdots\sharp\Sigma_{\mathbf{a}'}^{4k-1}}_{a}$ が不動点集合になる $\mathbf{Z}_m$-作用が存在する。

また、上に述べた不変量 Λ と Δ を用いて、この章において、他の応用も得られている。

第二章では、閉多様体の上の $(Z_2)^k$-作用を研究する。研究内容は二つの部分を分けられる。先ず、我々は、不動点集合の各成分の接束の Stiefel-Whitney 類が自明になるような閉多様体の上の Z_2-作用（対合）を考察する。不動点集合 $F = \sqcup_k F^{n-k}$ の各成分が $W(F^{n-k}) = 1$ を満たす対合 (T, M^n) は、同変的に境界とならなければ、$\dim F$ が下から評価される。（ここで、W は全 Stiefel-Whitney 類を意味する）。具体的には以下の定理が得られる。

定理 E.　$n > 2\dim F$ ならば、$W(F) = 1$ となる対合 (T, M^n) は同変的に境界となる。

定理Eは、性質：「$k \leq \frac{3}{5}n$ に対し $W(F^{n-k}) = 1$」を持つ不動点集合 $F = \sqcup_k F^{n-k}$ を持つ対合 (T, M^n) にまで一般化することができる。結果は以下に述べる。

定理 F.　(T, M^n) が　性質：「$k \leq \frac{3}{5}n$ に対し $W(F^{n-k}) = 1$」を満たす不動点集合 $F = \sqcup_k F^{n-k}$ を持つ対合であると仮定する、もし $n > 2\dim F$ ならば、(T, M^n) は同変的に境界となる。

$W(F) = 1$ の性質を持つ対合 (T, M^n) についてはさらに詳しいことがわかる。Thom の非有向同境群 MO_n の部分群 $\Gamma_n^{k_1,\cdots,k_l}$ （不動点集合 $F = \sqcup_{i=1}^{l} F^{n-k_i}$ の各次元の成分が $W(F^{n-k_i}) = 1$ なる性質を持つ対合 (T, M^n) の非有向同境類の集合）が定義される。$\Gamma_n = \sum_{0 \leq k_1,\cdots,k_l \leq n} \Gamma_n^{k_1,\cdots,k_l}$ と定義して、 Thom の非有向同境環 $MO_* = \sum_{n \geq 0} MO_n$ の部分環 $\Gamma_* = \sum_{n \geq 0} \Gamma_n$ を得る。この章では、Kosniowski と Stong の公式及び 同境理論を利用して、Γ_* の環構造を決定する。これにより、Kosniowski と Stong の一つの予想が解決される。さらに、部分群 $\Gamma_n^{k_1,\cdots,k_l}$ の群構造が決定できる。主要な結果は

定理 G.　Γ_* は、実射影空間 $RP(2^s)(s \geq 1)$ の非有向の同境類で生成される Z_2-多項式代数である。

次に、不動点集合の各次元の成分が連結と仮定しない $(Z_2)^k$-作用を考える。$(Z_2)^k$-作用に関する不動点集合の線型独立性の条件を定義する。この条件の下で、不動点集合の各次元の成分の連結性の仮定なしで、$(Z_2)^k$-作用に対する結果が二つ得られる。ひとつは Kosniowski と Stong による結果を改良するものである。すなわち、不動点集合の線型独立性の条件により、Konsiowski と Stong の結果における不動点集合の各次元の成分が連結という条件を、除くことができる。具体的には

定理 H.　(T, M^n) が不動点集合 $F = \sqcup_k F^{n-h}$ の各次元の成分 F^{n-h} が線型独立性の条件を満たす $(Z_2)^k$-作用であると仮定する。もし $n > (2^{k+1} - 1)\dim F$ ならば、(T, M^n) は同変的に境界となる。

もうひとつの結果は

定理 I.　孤立点のみから成る不動点集合を持つ $(Z_2)^k$-作用 $(T, M^n)(n > 1)$ の不動点集合は線型従属性の条件を持つ。

定理 I から、不動点集合が一つまたは二つの孤立点を含む場合には、$(Z_2)^k$-作用の同境類が決定できる。

第三章では、半線型のホモロジー G-球面及びこれらの同変慣性群を考える。Θ_n を n 次元ホモトピー球面のホモトピー同境類の集合の連結和を演算とする可換群とする。また、$H\Theta_n$ を n 次元ホモロジー球面のホモロジー同境類の集合の連結和を演算とする可換群とする。 Kervaire と Milnor は $n \neq 3$ のとき、Θ_n は有限群である

ことを示した。Θ_3 の構造は決定されていない。これは3次元の Poincaré 予想と直接関係している。一方、Fintushel と Stern は $H\Theta_3$ は無限群であることを証明した。Θ_n と $H\Theta_n$ の間の関係について、Hsiang と Kervaire は、$n \neq 3$ のとき、Θ_n と $H\Theta_n$ は同型であることを示した。従って、任意の n 次元のホモロジー球面の慣性群は、$n \neq 3$ の場合は、自明である。この章では、以上のものの同変類似物を考える。Θ_n の三つの同変類似物 Θ_V^G、$\Theta_V^{G,s}$ と Γ_V^G が知られているが、それらは大部分の場合に互いに同型である。ここで、G は Lie 群、V は G-表現とする。この章では Γ_V^G のホモロジー類似物を考える。ここで、Θ_V^G は、$\dim V^G > 0$ の条件の下で、不動点の接空間が V と同値であるような半線型のホモトピー G-球面の同変ホモトピー同境類の集合の同変連結和を演算とする可換群である。Θ_V^G に対しては、$H\Theta_n$ の一つ同変類似物 $H\Theta_V^G$ が構成できる。特に、Θ_V^G と $H\Theta_V^G$ は比較できる。$H\Theta_V^G$ を構成するために、次の定義を導入する。

定義. G の各部分群 H に対する不動点集合 M^H が空でないホモロジー球面であるようなホモロジー G-球面 M を 半線型のホモロジー G-球面と呼ぶ。

定義. 二つ有向的 G-閉多様体 M_1, M_2 は、G の各部分群 H に対して、$\partial W^H = M_1^H \sqcup -M_2^H$ 及び 包含写像 $i_j\colon M_j \to W (j = 1, 2)$ が同型 $H_*(M_j^H; \mathbf{Z}) \cong H_*(W^H; \mathbf{Z}) (j = 1, 2)$ を誘導するような有向 G-多様体 W が存在すれば、G-ホモロジー同境と呼ぶ。

定義. G-写像 $f : X \to Y$ が、G の各部分群 H に対して、同型 $H_*(X^H; \mathbf{Z}) \cong H_*(Y^H; \mathbf{Z}) (j = 1, 2)$ を誘導する時、X と Y は G-ホモロジー同値と呼ぶ。

以上の三つの概念に基づいて、Θ_V^G を不動点の接空間が V と同値であるような半線型ホモロジー G-球面の同変ホモロジー同境類の集合と定義する。$\dim V^G > 0$ の時、Θ_V^G は、同変連結和の下で、可換群になる。さらに、半自由な G-作用に対し、Θ_V^G と $H\Theta_V^G$ の間の関係を考察する。

定理 J. G-作用は半自由、$\dim V - \dim V^G \geq 3 + \dim G$ がつ $\dim V^G > 0$ とすると、$T([\Sigma]_G) = \langle \Sigma \rangle_G$ により定義される写像

$$T : \Theta_V^G \to H\Theta_V^G$$

は、$\dim V^G \neq 3, 4$ ならば、同型写像であり、 $\dim V^G = 4$ ならば、単射準同型写像である。

この結果は、半線型ホモロジー G-球面の同変慣性群の研究に応用できる。以下に述べる結果が得られる。

定理 K. G-作用は半自由、$\dim V - \dim V^G \geq 3 + \dim G$、$\dim V^G > 0$ と仮定する。$\dim V^G \neq 3$ ならば、任意の $\langle M \rangle_G \in H\Theta_V^G$ に対する M の同変慣性群は自明である。