論文審査の結果の要旨

氏　名　　呂　　　志

閉多様体上のコンパクト群の作用の研究は微分位相幾何学における重要な問題である。この研究では、群作用の固定点集合の位相あるいは配置と多様体の位相の関係を調べることが重要である。

論文提出者呂志は、本論文において閉多様体上のコンパクト群の作用に関する3つの研究を行っている。それらは、広義スミス予想の反例の代数的構成、閉多様体上の $(\mathbf{Z}_2)^k$ 作用の固定点集合の接束、ホモロジー G 球面の同変慣性群の研究である。

本論文の第1章において、奇数次元球面上の巡回群の作用を研究している。3次元球面上の滑らかな巡回群作用の固定点として現れる結び目は自明であるというのがスミス予想で、これは解決されている。また、それ以前に、Giffen. Sumners, Gordon 等により、高次元球面における巡回群作用で固定点集合が非自明な球面結び目となるものは構成されている。ブリースコーン多様体を用いて、奇数次元球面上の巡回群の作用で、固定点集合が非自明な球面結び目となるものが構成できるであろうことはDavis等により示唆されていた。論文提出者は実際にこのような例を明示的に与えた。

実際、ブリースコーン多様体 $\Sigma(a_1,\cdots,a_n)=\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n: z_1^{a_1}+\cdots+z_n^{a_n}=0, |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=\varepsilon^2\}$ に対しては第 k 成分に作用する $\mathbf{Z}_{a_k}$ 作用があり、その固定点は $\Sigma(a_1,\cdots,\widehat{a_k},\cdots,a_n)$ となる。まず、論文提出者は、この固定点の補空間が円周のホモトピー型を持たないことを注意した。それにより、特に $4\ell+1$ 次元 $(\ell\geq 1)$ あるいは $4\ell-1(\ell\geq 2)$ 次元ブリースコーン多様体 $\Sigma(2,\cdots,2,2m\sigma_\ell+1,2m\sigma_\ell+1,m)$ は、$4\ell+1$ 次元あるいは $4\ell-1$ 次元標準球面であり、このブリースコーン多様体の最後の成分に作用する $\mathbf{Z}_m$ 作用は, 非自明な標準球面結び目 $\Sigma(2,\cdots,2,2m\sigma_\ell+1,2m\sigma_\ell+1,\widehat{m})$ を固定点とすることを示した。ただし、$\sigma_\ell=2^{2\ell+1}(2^{2\ell-1}-1)\mathrm{numerator}(B_\ell/\ell)$ (B_ℓ はベルヌーイ数)。また、ヘフリガーの余次元の高い可微分結び目の例も構成している。すなわち、ブリースコーン多様体 $\Sigma(2,\cdots,2,2m\sigma_\ell+1,2m\sigma_\ell+1,m,\cdots,m)$ について、2は $2k-1$ 個、m は $2r-2k+1$ 個とすると、このブリースコーン多様体は、$4r+1$ 次元標準球面であり、このブリースコーン多様体の最後の $2r-2k+1$ 個の成分に作用する $\mathbf{Z}_m$ 作用は, 非自明な標準球面結び目 $\Sigma(2,\cdots,2,2m\sigma_\ell+1,2m\sigma_\ell+1,\widehat{m},\widehat{\cdots},\widehat{m})$ を固定点とすることを示した。

本論文の第2章において、閉多様体上の $(\mathbf{Z}_2)^k$ 作用の固定点集合の接束の研究を行っている。$\mathbf{Z}_2$ 作用については、その固定点集合を次元により和に書いたとき固定点集合 $\bigsqcup F^{n-k}$ の成分 F^{n-k} の全スティーフェル・ホイットニー類 $W(F^{n-k})$ について、$k\leq(3/5)n$ ならば $W(F^{n-k})=1$ が成り立てばこの作用は同変的に境界となることを示した。また、固定点集合のすべての成分 F^{n-k_i} が $W(F^{n-k_i})=1$ を満たす

とき、そのような $\mathbf{Z}_2$ 作用を持つ閉多様体の非有向同境類の集合のなす非有向同境類環 MO_n の部分環 $\Gamma_* = \sum \Gamma_n^{k_1,\cdots,k_\ell}$ が定義されるが、これの構造を決定した。すなわち Γ_* は2の冪乗の次元の実射影空間の非有向同境類で生成される $\mathbf{Z}_2$ 多項式環である。$(\mathbf{Z}_2)^k$ 作用については、それが同変的に境界となるための条件を与えるとともに、固定点集合が1つまたは2つの孤立点のみからなる場合に同境類を決定している。

本論文の第3章において、コンパクトリー群 G の作用を持つホモロジー球面の同変慣性群の研究を行っている。ホモトピー球面の群 Θ_n から $\mathbf{Z}$ ホモロジー球面の群 $H\Theta_n$ への写像は $n \neq 3$ のとき同型であることが知られている。固定点集合 V^G の次元が正であるような G の線形表現 V に対し定義される半線形ホモロジー G 球面とは、固定点集合が空でない $\mathbf{Z}$ ホモロジー球面であり、その固定点の接空間への G の作用が V と同型であるような G 作用を持つ $\mathbf{Z}$ ホモロジー球面である。このようなもののホモロジー同境類 $H\Theta_V^G$ は群をなす。このとき、同様に定義される半線形ホモトピー G 球面の h 同境類 Θ_V^G から $H\Theta_V^G$ への写像は、G 作用が半自由、$\dim V - \dim V^G \geq 3 + \dim G$、$\dim V^G > 0$、$\dim V^G \neq 3, 4$ のとき、同型写像である。また $\dim V^G = 4$ ならば単射であることを示した。このことから、同様の仮定の元で、$\dim V^G \neq 3$ ならば半線形ホモロジー G 球面の同変慣性群は自明であることがわかる。

このように論文提出者の研究は、多岐にわたっておりながら、非常に完成度の高いものであり、閉多様体のコンパクト群作用の研究において非常に重要なものである。よって本論文提出者呂志は博士(数理科学)の学位を授与されるに十分な資格があるものと認める。