論文内容の要旨

論文題目　　Fragility of Thermodynamically-Abnormal Quantum States of Finite Systems
（有限系における熱力学的に異常な量子状態の脆弱さ）

氏　　名　　宮寺隆之

物理学には扱うスケールに応じて、いろいろな理論が存在する。熱力学は我々のまわりのマクロな現象を良く記述し、量子力学はミクロな重ね合わせの世界を記述している。熱力学によれば、マクロな物理量は揺らぎを殆ど持たない。ところが量子力学によれば、系がマクロであっても有限系であれば、マクロに異なった状態の重ね合わせ（＝マクロな物理量が揺らぐ状態）も許される筈である。何故、我々はそのようなマクロな重ね合わせを観測しないのだろうか？系は閉じているようにしばしば仮定されるが、本当は環境と接触していることを思い出そう。純粋状態のうちあるものは、環境に対し脆弱で観測されえないのではないかというシナリオを Zurek たちは提案している。そこで次の疑問がわく。「マクロな物理量がゆらぐような状態は脆弱であるのだろうか？」

マクロだが有限な大きさの量子系を考える。具体的には d 次元の格子上の hypercube $\Lambda = L^d$ $(L \gg 1)$ を考える。今、この系は $L \to \infty$ で自発的対称性の破れをおこすとしよう。有限系では、系の ground state は対称性を破らない状態 Φ_0 を含むが、そのような状態は一般に、示強的な量であるオーダーパラメーター $M := \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{x\in\Lambda} m(x)$ （マクロな物理量）の揺らぎ

$$(\Phi_0, \delta M^* \delta M \Phi_0) = \mu > 0 \tag{1}$$

が熱力学的に異常な大きさ揺らぎ $(\mu = O(|\Lambda|))$ を持つ。我々はそのような状態を AFV(Anomolously Fluctuating Vacuum) とよぶ。我々の疑問はこの系において、以下のようになる。「AFV は脆弱なのだろうか？」

一方、無限系の純位相真空をよく近似する状態 Ξ を我々は PPV(Pure Phase Vacuum) とよぶ。PPV は対称性を破り、クラスター性をもつ。ただし、ここでいう有限系にお

けるクラスター性とは、状態の相関を特徴付ける領域（correlation region と呼ぶ）Ω が無限系の純位相真空におけるそれと同一であることをいう。従って、十分マクロな系（体積 $|\Lambda| \gg 1$）のときは、$|\Omega| \ll |\Lambda|$ である。以上の概念は論文中で厳密に定義される。我々の目的は AFV と PPV の脆弱性を調べることである。

さて、今、このような系が環境と弱く接しているとしよう。全系のハミルトニアンは

$$H_{total} = H_{sys} + \epsilon H_{int} + H_{env} \tag{2}$$

と書かれる。系と環境の相互作用としては、従来よく用いられてきた non-local な（マクロな物理量どうしのみがカップルしている）相互作用とは異なり、我々はきちんと物理的な近接的な相互作用を採用する。i.e.,

$$H_{int} := \sum_{x \in \Lambda_0} a(x) \otimes b(x) \tag{3}$$

ただし、ここで $a(x)$ は系のサイト x 上の物理量、$b(x)$ は環境の対応する（近接した）サイトの物理量である。また、相互作用のある領域 Λ_0 を contact region とよぶ。我々は環境の自由度を縮約し、さらにマルコフ近似してマスター方程式を系の運動方程式として導く。すると（部分）系の時間発展はもはやユニタリーではなくなる。$t = 0$ で純粋状態にあった状態は時間発展とともに decohere していき、より混合した状態になっていく。我々は状態が、あっという間に（ミクロな時間スケールで）その純粋性を失うとき、脆弱であると呼ぶ。その指標として本論文の主要部分においては線形エントロピーと呼ばれる量 $S_{lin}[\rho] := 1 - \mathrm{tr}[\rho^2]$ を採用した。これは、純粋状態にたいしてはゼロをとり、より混合している状態に対してはより大きな値（但し < 1）をとる。つまり、純粋状態 ϕ が脆弱 (fragile) であるとは、ミクロな時間で $S[\phi, t]$ (初期状態を ϕ としたときの時刻 t でのエントロピー) が増加してしまうことをいい、逆に、ある純粋状態 ψ が頑健 (robust) であるとは、マクロな時間領域にわたって $S[\psi, t]$ がなかなか増加しないことをいう。

線形エントロピーの振る舞いを調べるために、我々は相互作用の強さ ϵ に対して摂動展開を行い、$S_{lin}[\phi, t] = S_{lin}^{(0)} + S_{lin}^{(1)} + S_{lin}^{(2)} + \cdots$ と書く。ただし、$S_{lin}^{(N)}$ は ϵ^{2N} に比例する項である。ミクロな時間領域においては、最低次の項 $S_{lin}^{(1)}$(初期状態を純粋状態に選んだので $S_{lin}^{(0)}$ は常にゼロ）が支配的であることが示される。そこで、状態の脆弱さを議論するためには一次近似を調べればよいことがわかる。まず、AFV に対しては以下の定理が成り立つことを我々は示した。

定理 0.1 $A := \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} a(x)$ に対して、

$$S_{lin}^{(1)}(\Phi_0, t) \geq \frac{\epsilon^2}{\hbar^2} g_{00} \langle \Phi_0 | \delta A^* \delta A | \Phi_0 \rangle t \tag{4}$$

ただし、g_{00} は環境のみによって決まる定数。

すなわち、AFV の decoherence はマクロな物理量 A の揺らぎで下から抑えられる。$a(x) = m(x)$（オーダーパラメーター）であるときこの定理は

$$S_{lin}^{(1)}(\Phi_0, t) \geq \frac{\epsilon^2}{\hbar^2} g_{00} \mu \tag{5}$$

を導く。まさにこのとき、AFV は脆弱である。また、その時 PPV Ξ の脆弱性は AFV の脆弱性を超えないことが次の定理のように示される。

定理 0.2

$$S_{lin}^{(1)}(\Phi_0,t)-S_{lin}^{(1)}(\Xi_{L(R)},t)\geq\frac{\epsilon^2}{\hbar^2}g_{00}t\nu-\epsilon' \tag{6}$$

ただし、ϵ' は系の大きさ $|\Lambda|\to\infty$ で $\epsilon'\to 0$ な小さな数である。

つまり、PPV は少なくとも AFV ほどは脆弱ではない。

では、PPV は頑健な状態だろうか。まず、ある状態が頑健であることをいうためには、摂動の一次で評価を止めてはいけない。何故ならばマクロな時間領域では高次の項も効いてくる筈だからである。我々は特殊なケース、大雑把に言ってマスター方程式の散逸の項が細かい波数を拾わないときには、実際に PPV は頑健であることを示した。ただし、条件は contact region が correlation region よりも十分大きいことである。

定理 0.3

$$S_{lin}(\Xi,t)\leq(\frac{|\Omega|}{|\Lambda_0|}+\varepsilon)^{1/2}\frac{8\|a\|^2\epsilon^2\tilde{g}_{00}t}{\hbar^2}exp(\frac{4\|a\|^2\epsilon^2\tilde{g}_{00}t}{\hbar^2}) \tag{7}$$

ただし、$\|a\|$ は $a(x)$ のノルム、ε は Ω を定義するときに用いる微小な許容誤差である。

この定理の項 $\frac{|\Omega|}{|\Lambda_0|}$ は contact region が correlation region よりも十分大きければ PPV は脆弱であることを示している。

まとめると、我々は $a(x)=m(x)$ であるとき一般の散逸に対して、マクロな物理量が大きな揺らぎをもつ対称な真空 AFV は脆弱であることをまず示した。次に、対称性を破りクラスター性をもつ（無限系での真空を近似する）PPV は AFV ほどは脆弱ではないことを示した。最後に、ある特殊な散逸の場合には、PPV は頑健であることを示した。今までの研究は本質的に一自由度のモデルであるものが多かったので、その正当性も普遍性も一般には不明であったのに対し、本研究は多体系をまともに取り扱って普遍的な結論を導き出したのが特徴である。