論文の内容の要旨

論文題名：速いスケールから遅いスケールへの統計的性質の伝搬

氏名：藤本 仰一

生物システムの発達、発生、学習過程といった履歴をひきずりながら発展していくシステムにおいては、その各段階における速いダイナミックス(例えば、条件反射行動のような感作的行動)から遅いダイナミックス(例えば、適応、学習)に至る様々なスケールのダイナミックスが何桁にもわたって混在し、互いに影響を及ぼしあっている。このような状況は生物システムのみならず、気象システムにおける雲や海流などのダイナミックスにも見られる。スケールが混在する系の特徴を抽出する指導原理として、Haken により提唱された隷属化原理がある。この原理の基礎には断熱近似があり、その精神は、速い変数はその平均＋ノイズと見て、遅い変数の変化のみに注目せよというものである。これは、多変数の振舞を扱う統計物理学や非線形解析学で、非常に有効で重要な役割を果たしている。速い変数と遅い変数のスケールが十分に離れている場合には断熱近似の有効性は揺るぎ無いが、上記の如く様々なスケールが混在して各スケール差が縮まってくると数理的にその近似の有効性は揺らぎだし、現象のレベルでも経験的に感じることが出来る。例えば、記憶形成過程や発達過程では、むしろ速いダイナミックスが遅いダイナミックスを支配する状況が(相転移点のような特殊な状況のみでなく)定常的に機能していると考えられるこの感覚に対応する数理の可能性を追求し、生物システムや気象システムの理解を深めることが本研究の動機である。

明らかに断熱近似描像では捉えられない性質として、『速い変数の統計的性質に、遅い変数の統計的性質が依存する』性質に注目する。以下に、様々な時間スケールのダイナミックスが何桁にもわたって混在し互いに影響を及ぼしあうモデルを導入し、そこでこの性質を見出し、そのメカニズムの解析を行った。トポロジカルな性質が同じ非線形振動子を複数個用意し、それらの時間スケールのみに異なりを導入して結合する。スケールの異なりは等比級数的に分布させる。各素子の非線形振動子を

$$\dot{\vec{X}} = \vec{F}(\gamma, \vec{X}) \tag{1}$$

とし、その時間微分項に変数変換を施して、

$$T_i\dot{\vec{X}}_i = \vec{F}(\gamma, \vec{X}_i), \quad T_i \equiv \tau^{i-1}T_1, \quad \tau > 1 \tag{2}$$

とし、それらを近い時間スケールを持つ素子と結合して、

$$T_i\dot{\vec{X}}_i = \vec{G}(\vec{F}(\gamma, \vec{X}_i,)\epsilon, \vec{X}_{i-1}, \vec{X}_{i+1}) \tag{3}$$

とする。$\vec{X}$ は各素子の変数で、各素子 i ($= 1, 2, , , , , L \equiv$ system size) の特徴的な時間スケールは $T_i > T_{i-1}$ で、i が大きいほど遅いダイナミックスになる。

このモデルで、トータルの時間スケール差を例えば $\tau^{L-1} = 10^3$ と一定にし、L を大きく (τ を小さく) すると、スケールの混在度が強まる。即ち (L, τ) をパラメーターとしてスケールの混在度が記述出来る。このモデルを用いて、ある範囲内 $\tau_* \geq \tau$ で、『速いダイナミックスの統計的性質を変えると遅いダイナミックスの統計的性質が変わる』ことを示した。これを、個々の素子に (a) カオスを示す Lorenz 方程式を用いた場合と、(b) 移流不安定性を持つ非線形振動子を用いた場合とに見出した。(c) さらにこれらの時間スケールから空間スケールへのアナロジーとして、各素子に Turing pattern を生成する反応拡散方程式を用い、空間微分項へ変数変換を施してそれらを結合するモデルを導入し、様々な空間スケールの Turing pattern の生成に加え、それらに空間スケールを貫く相関が生成されることを見出した。以下に各場合の説明を述べ、最後に全ての場合に共通して見られる性質を述べる。

(a) : カオスを示す Lorenz 方程式を用いた場合 : 個々の素子 $\vec{X}_i$ に時間スケール差が無い場合 ($\tau = 1.0$) に、(相互作用による) 引き込みと (カオスによる) その崩壊を繰り返す系に、時間スケール差 $\tau > 1$ をつける。ある程度 τ が小さければ、様々な時間スケールでの引き込みと崩壊が起こる。この場合に、一番速い素子 $\vec{X}_1$ の非線形パラメーター γ へ、遅いダイナミックス $\vec{X}_L$ の統計的性質が依存性することを見出した。

そして、ダイナミックスの中立安定性 (不安定性指数がゼロに近い正であること) と τ がある範囲内にあることを要請することで、以下のメカニズムを導出した。

1. 速い変数のパラメーター変化が、各素子の不安定性指数 (Lyapunov exponent $\lambda(i)$) の符号反転をカスケード的に引き起こせる。
2. この連鎖が遅いスケールの $\lambda(i)$ の符号反転へ伝搬されて、統計的性質の変化を引き起こす。
3. この場合に、遅い変数のパラメーターを変化させても、$\lambda(i)$ の符号反転カスケードを引き起こすことは出来ない。
4. 時間スケール方向の統計的性質の伝搬に関する非対称性が断熱近似描像と逆方向であることを、1,3 で述べた不安定性指数 (Lyapunov exponent $\lambda(i)$) の符号フリップカスケードが可能/不可能であることにより説明できる。

(b) : 移流不安定性を持つ非線形振動子を用いた場合 (※移流不安定性とは、乱れを時間的に減衰するが空間的には増幅伝搬する性質で、水道の蛇口などの開水路系に普遍的に存在する。移流不安定性の指標として、流れに沿って速度 v で動きながら Lyapunov exponent を測定した co-moving Lyapunov exponent λ_v が知られている。)
このシステムでも速いスケール $i = 1$ のパラメーター依存性が遅いスケールのダイナミックスに現われることを見出し、以下のメカニズムの流れを解明した。

1. 移流不安定性 λ_v は乱れの時間スケールに依存し、各素子での λ_v は伝搬波の時間スケール Δ_i を各素子の時間スケール T_i で相対化した時間スケール $\frac{\Delta_i}{T_i}$ で特長づけられる。

2. 伝搬波の時間スケールを遅いスケールへシフトするメカニズムとして、一部の波の淘汰消滅により周期倍加を見出した。これは、$\lambda_v(i)$ が正から負に反転することで発生する。これを何回も繰り返すことで伝搬波の時間スケールが遅くなる。
3. 周期倍加により、各素子のダイナミックスの伝搬波の λ_v がスケール方向に振動し、$i=1$ のパラメーター γ に依存してその位相がシフトする。
4. 位相シフトが各素子の $\lambda_v(i)$ に差異を生み、スケール方向にわたるその積算 $exp(\sum_{i=1}^{i=L}\lambda_v(i))$ の差異が遅いスケールのダイナミックスの性質に大きな差を生む。

以上のスケール方向の統計的性質伝搬過程の力学を抽出した。

(c) : 時間スケールから空間スケールへのアナロジー：1素子として、Turing pattern を生成し、定常状態では時間的に固定点になる反応拡散方程式

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{F}(\gamma, \vec{V}) + \vec{D}\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial \vec{x}^2} \tag{4}$$

を用い、時間微分項の代わりに空間微分項のみに変数変換を施して、

$$\frac{\partial \vec{V_i}}{\partial t} = \vec{F}(\gamma, \vec{V_i}) + \vec{D_i}\frac{\partial^2 \vec{V_i}}{\partial \vec{x}^2}, \qquad \vec{D_i} \equiv \delta^{2(i-1)}\vec{D_1}, \qquad \delta > 1 \tag{5}$$

とし、それらを近い空間スケールを持つ素子と結合して、

$$\frac{\partial \vec{V_i}}{\partial t} = \vec{F}(\gamma, \vec{V_i}, \vec{V_{i-1}}, \vec{V_{i+1}}) + \vec{D_i}\frac{\partial^2 \vec{V_i}}{\partial \vec{x}^2} \tag{6}$$

とする。このシステムでは、様々な空間スケールをあらかじめ分布させてあるので、その各スケールで Turing pattern が生成される。これに加えて、トータルの空間スケール差 $\delta^{L-1} \gg 1$ を一定にして system size L を大きく（δ を小さく）していくと、ある範囲内 $\delta_* \geq \delta$ で『各パターン間にスケールを貫くが相関が生成される』ことを示した。ここで相関とは、各スケールで生成されるパターンの空間的な位相の相関を意味し、様々な空間スケールのパターン形成が協同的に行われることを示す。このメカニズムにも、パターン形成過程で、小さいスケールの Turing pattern の一部の淘汰消滅により空間周期倍加し、大きなスケールの素子に伝搬されるというメカニズムが本質的になっており、(b) の時間周期倍加との共通が見られる。この場合には、ある空間波数モードに対する Turing 不安定性の指数が、正から負に反転することで周期倍加が説明できる。

以上のメカニズムを比較し、共通する以下の一般的な性質を抽出した。

- τ や δ をある程度小さいことで初めて、「速いダイナミックスの統計的性質への遅いダイナミックスの統計的性質の依存性」が現われる。
- 特長的な不安定性指数の符号反転が連鎖的に起こることが統計的性質伝搬に本質的に重要である。
- τ や δ を小さくしていくと、断熱近似的描像である「遅いダイナミックスの統計的性質への遅いダイナミックスの統計的性質の依存性」は現われない。