論文内容の要旨

論文題目　Combinatorics of triangulations
（3 角形分割の組合せ論）

氏　名　竹内史比古

本論文では、3 角形分割およびそれに近い対象のいくつかの組合せ的側面を研究する。d 次元空間の点配置とそれらの点に頂点を持つ多面体の 3 角形分割とは、その多面体の、それらの点に頂点を持つ d 次元単体達による分解のことである。

3 角形分割が登場する 2 つの主な領域は、数学における組合せ幾何と、情報科学における計算幾何である。組合せ幾何で 3 角形分割と関連する分野としては、凸多面体の理論、アフィントーリック多様体の Gröbner 基底、Hilbert 基底、一般化超幾何関数、Ehrhart 多項式などがある。計算幾何の多くの分野、メッシュ生成、コンピュータグラフィックス、ソリッドモデリング、モーションプランニングなどで、3 角形分割は重要な役割を果たしている。我々が扱う問題は、組合せ幾何の主な問題のいくつかである。本論文での話題は、計算幾何での応用よりは単純化した基本的な状況についての解析であるが、それらの応用を背景として生まれる問題であり、このような応用でなぜ／いつ上手く行くかに洞察を与えうるものになっている。

研究の対象とするものは、3 角形分割の周辺にある、抽象的あるいは幾何的な単体的複体、3 角形分割、3 角形分解である。具体的には、(1) 3 次元凸多面体の 3 角形分割、(2)（主に）平面の 3 角形分割、(3) 2 次元球面、(4) 2 次元の単体的複体、を扱った。これらはこの順に、かちっとしたものから抽象的なものになっている。これらの対象について、

我々が扱った性質は、(1) サイズ、(2) 正則性という実座標での3角形分割の凸性を表す性質、(3) geometric shelling という組合せトポロジー的なものに実座標での凸性を加味した性質、(4) shellability、extendable shellability、vertex decomposability の逐次的構成についての組合せトポロジー的な性質、である。これらはこの順に、基本的な性質から精密な性質になっている。各性質の持つ難しさは、次元が上がると大きくなるが、本研究では、上の4つのレベルについて、それぞれの次元の中で最も根本的なもの、よりかちっとした対象については基本的な性質を、より抽象的な対象については精密な性質を調べた。4つの結果を順番に紹介する。(全体の概要は第1章)

最初のものは、分解のサイズに関するものである。3角形分解というのは、単体達が必ずしも単体的複体を作るようにきれいに交わっていなくてもよい分解のことである。3角形分解は、3角形分割を含むクラスを形作っている。我々は、3次元凸多面体についての、これらの2つの分解のクラスのサイズから見た違いを示した。また、これらの3角形分解のサイズについて、3角形分割と同様の上下限を示した。(第2章。Jesús A. de Loera、Francisco Santos との共同研究)

2つ目の結果は、非正則3角形分割についてのものである。3角形分割の極大次元の単体達をある点から見たときの手前/向こうでの順序を表すグラフを定義した。このグラフの中に、ある非対称的なサイクルを持つような3角形分割達は、非正則3角形分割の中で、部分クラスをなす。よって、我々は、非正則3角形分割の組合せ的な部分クラスを与えたことになり、これ自体おもしろいものである。また、線形計画の双対性を使って、さらに深くこれらの3角形分割の性質を調べた。(第3章)

3つ目の結果も、組合せトポロジー的な性質についてのものである。ここでは、3次元凸多面体についての、幾何的な shelling、つまりある組合せ的に同値な凸多面体で line shelling となっているもの、について研究した。shelling が幾何的な shelling になるための十分条件をいくつか示した。これは、凸多面体の理論およびグラフ理論の両方で、興味深いものである。(第4章。Takayuki Ishizeki との共同研究)

最後の結果は、組合せトポロジー的な性質についてのものである。ここでは、逐次的な構成についての性質、つまり、shellability、extendable shellability、vertex decomposability の違いについて2次元の単体的複体を対象として研究した。小さなサイズの、shellable でない非擬似多様体を列挙することにより、これらのクラスの違いを示す最小例、および知られていなかった関係を明らかにする例をみつけた。(第5章。Sonoko Moriyama との共同研究)