論文内容の要旨

論文題目：The Combinatorial Gauss Diagram Formula for Kontsevich Integral
(コンツェビッチ積分に対する組み合わせ論的計算公式)

氏名：落合　友四郎

結び目の分類は数学において重要な未解決問題のうちのひとつである。この問題に対して１９２０年代にアメリカのJ. W. Alexanderが部分的解答として最初の絡み目不変多項式であるAlexander多項式を発見した。Alexander多項式は向き付けられた結び目の位相同値類に対して多項式を対応させるものである。しかしAlexander多項式はある程度結び目を区別することが出来るが、すべての結び目を分類出来るほど強力ではない。その後６０年ほど結び目理論は停滞気味であったが、１９８０年代半ばにV. F. R. Jonesが作用素環の研究から大きな発見をした。彼は６０年ぶりに新しい結び目多項式であるJones多項式を発見したのである。これを契機に、Yang-Baxter方程式の解などを用いて次々と新しい不変多項式がたくさん発見された。これら多

数の不変多項式は、量子群やKZ方程式を用いて量子不変量として統一的に理解される事となった。

一方、思いがけない事に物理学の領域から大きな進歩がもたらされた。１９８９年、E. WittenはChern-Simons場の量子論と結び目不変多項式の関係を明らかにしたのである。彼はChern-Simons場の量子論でWilson loopsの真空期待値はJones多項式をはじめとする結び目不変多項式になることを示したのである。

１９９０年に量子不変量とは独立に、V. A. VassilievによりVassiliev不変量（有限型不変量）という新しい概念が導入された。その後、Birman-LinによりJones多項式をはじめとする量子不変量の展開係数はVassiliev不変量になることが示された。このことはChern-Simons場の量子論においてWilson loopsの真空期待値の摂動展開係数はVassiliev不変量になることが示唆される。Vassiliev不変量の登場により、量子不変量の摂動展開係数の重要性が認識されるようになった。

１９９３年に、M.KontsevichはVassiliev不変量に関して重要な発見をした。彼は、KZ方程式より反復積分を使いKontsevich積分を定義した。Kontsevich積分からweight systemを通して全てのVassiliev不変量が構成できる。さらにその特別の場合として、Lie環とその表現から定義されるweight systemとKontsevich積分を組み合わせる事により、すべての量子不変量を再構成する事もできる。つまりVassiliev不変量と量子不変量は両方ともKontsevich積分より導かれることが示された。これらの意味で、Kontsevich積分は結び目を研究する上で重要な対象であると考えられている。

この博士論文ではKontsevich積分を利用して多成分絡み目の場合４次まで、Vassiliev不変量に対する組み合わせ論的公式を導出した。この公式は、実際に計算実行可能という望ましい性質を持つ。

一方、Hirshfeld, Sassenberg, Klokerらは１連の論文の中でChern-Simons場の理論を利用して、多成分結び目３次までの場合にVassiliev不変量の組み

合わせ論的公式を導出した。その後、Labastida も Chern-Simons 場の理論を利用して、１成分結び目４次までの場合に Vassiliev 不変量の組み合わせ論的公式を導出した。

この博士論文の公式は彼らの結果を完全に含むもので、４次の多成分絡み目の場合には完全に新しい公式である。さらに場の量子論を使っていないので、公式の導出が数学的である。この公式は実際に Vassiliev 不変量 (または Kontsevich 積分) を組み合わせ論的に計算することを可能にする具体的な公式である。

この論文では以下の結果を示す。定理１において多成分絡み目の場合４次まで Kontsevich 積分は、絡み目不変量 v_1, v_2, $v_{3.1}$, $v_{3.2}$, $v_{4.1}$, $v_{4.2}$, $v_{4.3}$, $v_{4.4}$ を用いて表される事を示す。次に定理２において、これらの絡み目不変量 v_1, v_2, $v_{3.1}$, $v_{3.2}$, $v_{4.1}$, $v_{4.2}$, $v_{4.3}$, $v_{4.4}$ に対して、Gauss Diagram を用いた組み合わせ論的公式を与える。その際、Kontsevich 積分に対する帰納的議論より、これらの組み合わせ論的公式を導びく。weight system にリー環 su(N) を採用することにより Kontsevich 積分から Homfly 多項式が導かれることが知られている。そこで定理２の系において Homfly 多項式の展開係数に対する組み合わせ論的公式が得られる。組み合わせ論的公式の検証としてこの Homfly 多項式の展開係数に対する組み合わせ論的公式が Homfly 多項式の skein relation を満たすことを直接示す。これで確かに得られた組み合わせ論的公式が正しいものであることが傍証できる。

以下、論文の構成を述べる。まず第２、３、４、５章において、結び目不変多項式、Chern-Simons 場の理論、Vassiliev 不変量、weight sysytem と Kontsevich 積分を復習する。そして第６、７章において Gauss Diagram を用いた組み合わせ論的公式とその公式に必要な概念の定義を与える。第８章において、Homfly 多項式との関係を議論して、組み合わせ論的公式を特別な例の場合に実際に計算してみる。第９章において、Kontsevich 積分に対する帰納的議論より、これらの組み合わせ論的公式の証明を与える。第１０章にお

いて組み合わせ論的公式を Homfly 多項式の skein relation に代入することにより傍証をする。