論文の内容の要旨

論文題目　Anderson Transition in One Dimensional Random Mass Fermion Model

(１次元ランダムマスフェルミオンモデルにおけるアンダーソン転移)

氏名　竹田 晃人

Anderson が系のランダムネスの強さをコントロールすることによって起きる金属・絶縁体転移 (Anderson 転移) を指摘した後、この相転移現象について様々な研究が行われている。そして、 Abrahams らのスケーリング理論により、一般には Anderson 転移が起きるのは３次元以上のランダム系で、１・２次元ランダム系では固有状態は必ず局在するという認識が得られている。その後、非線形シグマ模型の繰り込み群による解析、ランダム行列理論、エネルギー準位統計および臨界指数の計算等の結果から、Anderson 転移には普遍性 (universality) があることが指摘されている。 Anderson 転移の性質を考える際には、ランダム系は系の時間反転対称性の有無及びスピン回転対称性の有無により３つの普遍類 (universality class) に分類されることが知られている。

しかし、上記の認識に反し、１・２次元においても非局在状態が存在する (Anderson 転移が起きる) 例外的なランダム系があることが知られている。まず、非線形シグマ模型の解析より、２次元でスピン軌道相互作用が存在するランダム系は、スケーリング理論の予想に反して Anderson 転移が起きることが示唆されている。また、２次元の整数量子ホール系においては、各 Landau 準位の中心に非局在状態があることが分かっている。

ところで、以上の研究はランダムネスの空間的相関が全く無い (ホワイトノイズ的相関) ことを仮定した上でなされている。

我々の研究は、上記の研究とは異なりランダムネスに空間的な相関があるようなラン

ダム系についての Anderson 転移の様相を調べることを目的とする。その動機としては次のようなものが挙げられる。

- 上記のように Anderson 転移の普遍性はランダムネスがホワイトノイズ的な場合についてのみ確かめられているため、ランダムネスに空間的相関があるような系の Anderson 転移の性質は既知の Anderson 転移の普遍性から予想される性質とは異なる可能性がある。そのようなことが実際に起こり得るのかを確かめてみたい。
- 最近、ランダムネスに空間的相関がある場合についての低次元ランダム系の Anderson 転移の研究が幾つかなされ、先程挙げた Anderson 転移の普遍性からの逸脱を示唆する結果が報告されている。具体的には、1 次元系でもランダムネスに空間的相関がある場合には Anderson 転移が起きるという結果である。これらの結果を踏まえた上で、我々は比較の為にそれらの研究で取り上げた系とは異なるランダム系を用い、上記のようにランダムネスに空間的相関がある場合の Anderson 転移の性質を調べ、それらの結果を検証したい。
- 系のランダムネスが空間的相関を持つ場合については、系の取り扱いが困難になるために今まで研究が殆んど行われていない。そこで、そのようなランダムネスを持つ系を扱えるような解析手法を確立したい。
- 現実のランダム系ではホワイトノイズ的なランダムネスは実現しない。具体的に言えば、不純物の位置やランダムポテンシャルの大きさに空間的な相関が全く無いという状況は現実にはあり得ない。つまり、ランダムネスが空間的相関を持つ場合は、現実の系の Anderson 転移を考える上でも重要であり、我々はこのような設定下での Anderson 転移の様子を調べる必要があると考える。

当研究では 1 次元のランダムマス Dirac フェルミオン系を取り上げた。この系においては質量項の値が空間的にランダムに変化する。また、この系は 1 次元ランダムホッピングタイトバインディング系と関係付けられ、ランダム質量はランダムホッピングに対応する事が知られている。

我々はこの系について、ランダム質量が空間的相関を持つ場合でも用いることが出来る解析手法を開発した。また、その手法を用いてこの系の局在長のエネルギー依存性を計算した。この系には 1 次元ランダム系としては例外的にホワイトノイズ的なランダム質量の下でも $E=0$ に非局在状態が存在する、つまり局在長が $E=0$ で発散することが知られている。我々はランダム質量が空間的相関を持つように設定した上で局在長のエネルギー依存性を数値的に計算し、エネルギー依存性がホワイトノイズ的相関の場合からずれるか、またホワイトノイズ的相関の場合と異なり、$E=0$ 以外の点でも局在長が発散するか ($E=0$ 以外に非局在状態が現れるか) どうかをを調べた。

以下、研究内容の詳細について述べる。

1次元のランダムな質量をもつ Dirac フェルミオン系は、次の Hamiltonian によって記述される。

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int dx \psi^\dagger h \psi, \\ h &= -i\sigma^z \partial_x + m(x)\sigma^y. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、ψ は2成分の波動関数、$m(x)$ は質量項であり、$m(x)$ が空間的にランダムな値を取るように設定する。

上記のランダム質量を持つフェルミオン系を扱うに当たり、我々は $m(x)$ の形を多重キンク・アンチキンクの形に限定した。その上でキンクとアンチキンクの間隔をランダムにすることにより系にランダムネスを取り入れることとした。このような設定の下では、この2成分波動関数に対する Schrödinger 方程式及び境界条件は簡単な形に書けることが分かる。具体的には、境界条件が多数の2行2列の行列の積に対する条件として表されることが分かる (転送行列法)。そしてこの条件は数値計算により解く事が出来、この系の固有状態及びエネルギー固有値を得る事が出来る。また、キンク間隔の具体的な値は確率分布に基づいてランダムに取ることとする。我々は以上のような手法を考案し、この系を解析することを試みた。

まず、我々はこの転送行列法を実際に用いて系を解析し、計算結果が既知の結果を正しく再現するか、そして我々の方法が解析手法として信頼できるかを調べる事とした。始めにキンク間隔の確率分布がガウス分布の場合に固有状態を実際に計算し波動関数の具体的な形を調べた。そしてガウス分布の分散が増すにつれて状態が局在状態へと移行する様子を観察した。つまり、これにより Anderson 局在の一般的な性質が確認されたということになる。

次にキンク間隔の確率分布が指数分布の場合について系の状態密度を計算した。キンク間隔の分布を指数分布に選ぶと、質量の相関は次の形のように指数関数的相関となることが知られている。

$$[\ m(x)\ m(y)\ ]_{\text{ens}} \propto \frac{1}{\lambda} \exp\left(-|x-y|/\lambda\right). \tag{2}$$

ここで、λ はランダム質量の相関長に対応する。ところで、この場合については状態密度が λ の摂動で3次までについて解析的に求められているが、この解析計算における λ 展開が収束するという保障はされていない。また一方で我々の数値計算は有限系でしか行えない。そこで、我々は数値計算法と λ 展開による解析的手法の相互チェックの為に、数値計算で指数関数的相関の場合の状態密度を求め、上記の λ 展開の解析的な結果と比較した。そして、これらはほぼ一致することが分かった。この結果からそれぞれの解析手法の正しさが互いに保障されたといえる。

また、我々は $E = 0$ に存在する非局在状態の多重フラクタル指数を、基底状態の波動関数を用いてホワイトノイズ的相関の場合について計算した。そして、解析的に計算されている既知の多重フラクタル指数がほぼ再現される事を確認した。

これより局在長の計算について述べる。羽田野・Nelson は系に複素ベクトルポテンシャルを導入することにより波動関数の局在長が求められることを指摘したが、我々はこの方法と転送行列法とを組み合わせた波動関数の局在長の計算法を考案した。

この計算法の正しさを確認する為、我々はまずホワイトノイズ的相関の場合の局在長のエネルギー依存性を計算した。局在長の定義の方法は2つ知られている。1つは典型長(1つの系の固有状態の局在長を求め、そのアンサンブル平均を取った量)、もう1つは平均長(アンサンブル平均をとったグリーン関数の減衰率から求まる量)である。我々はこの2つの量のエネルギー依存性を数値計算によって求め、既知の結果と一致する事を確認した。以上から、この解析手法が信頼できることが示されたといえる。

次に、指数関数的相関をもつランダム質量の下での局在長のエネルギー依存性を調べた。局在長についても先程述べた λ 展開を用いた解析的手法による結果が知られているが、我々は、先程の式で $\lambda \sim 1$ の場合までについて(つまり、λ 展開を用いた解析的な計算の結果が適用できない場合までについて)局在長のエネルギー依存性を調べた。そして、エネルギー依存性はホワイトノイズの場合と殆んど同じであるという結果を得た。この結果より、今述べたようなランダム質量の相関は相転移に影響を及ぼさないということが予想される。

また、我々はランダム質量が長距離の相関を持つ場合について調べた。というのは、このようなランダム質量の設定は系の性質に与える影響が大きいと考えられるからである。

まずキンク間隔の確率分布がガウス分布の場合に再び着目した。そして、分布の分散が小さい場合には非局在状態(系のサイズを上回るような局在長を持つ状態)が $E = 0$ 以外にも存在するという結果を得た。しかし、これらの状態は系が大きくなるにつれ局在状態に移行することが分かった。一方で $E = 0$ 付近には系のサイズに関わらず非局在状態が存在するという結果が得られた。つまり、このようなランダム質量の下では、無限系においては非局在状態は $E = 0$ にしか存在しないということが予想される。

その他に、質量の相関が巾関数の形になる場合、及びキンク間の距離間隔の相関が巾関数の形になる場合についても調べたが、これらの場合に $E = 0$ 以外に非局在状態が存在するかどうかについてはまだ明確な結論を得ていない。

以上、解析手法及びこれまでの計算の結果について説明した。まとめると、現在までの計算からは相関をもつランダム質量の下で無限系に $E = 0$ 以外に非局在状態があるという結果は得られなかったということになる。ただ結果には幾つか曖昧な点もあり、さらなる研究が今後必要だと思われる。また、ランダム1次元系での Anderson 転移を示唆する論文は幾つかあるので、本研究で得た結果とこれらの結果との関係を調べることが今後の課題であると思われる。