論文内容の要旨

論文題目　On the Topological Configurations in the Skyrme-Faddeev Model

(Skyrme-Faddeev 模型におけるトポロジカルな配位について)

氏名　鶴丸豊広

物理においてトポロジーが本質的な役割を演ずる例が多く知られている。例えば素粒子の統一理論においては磁気単極子が現れる可能性があり、その磁荷が整数値になることがトポロジー的な議論から導かれる。また、超電導体においては渦線が現れるが、その安定性は位相不変量の存在と関連していることが知られている。興味深いことに、このようなトポロジー的な励起は多くの場合有限のエネルギーを持ち、さらに位相不変量と関連した保存量を持つため、粒子と同一視されうる。とりわけ重要なことは、古典論の段階で既に保存量が離散化される、つまり「量子化」されるということであり、このことは量子化のある側面が、物理系の持つトポロジー的な性質に帰せられる可能性を示唆する。

そのようなトポロジー的な励起を持つ系の例として非線形シグマ模型 (Nonlinear Sigma Model, NLSM) といわれる種類の理論がある。その中でも、この博士論文では NLSM の一種である Skyrme-Faddeev (SF) 模型について考察する。SF 模型は Faddeev により提案された四次元時空上の理論であり、3 成分の単位ベクトル $\mathbf{n}$ ($\sum_{a=1}^{3} n^a n^a = 1$) を場の変数として持っている。すなわち、target space として $\mathbf{n} \in S^2$ を持つ理論である。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SF}} = \frac{1}{2\lambda^2}(\partial_\mu \mathbf{n})^2 + \frac{1}{4e^2}(\epsilon^{abc} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c)^2$$

近年、Faddeev と Niemi により、この模型が $SU(2)$ Yang-Mills (YM) 理論の低エネルギーでの有効作用となる可能性が指摘された。YM 理論は強い相互作用などの基本的な相互作用を記述するものとして知られ、高エネルギーでは漸近自由性により摂動的な解析が可能だが、低エネルギー領域では強結合になるため、そのような系統的な解析は難しい。

SF 模型の興味深い点として、Hopf ソリトンと呼ばれるソリトン解の存在がある。これらのソリトン解は SF 模型の配位空間がトポロジー的に等価でない配位に分類されることに

関連して現れる。すなわち、空間3次元での位相空間は Hopf 数 H と呼ばれる位相不変量 ($\pi_3(S^2)=\mathbb{Z}$) により分類され、H のそれぞれの値についてソリトン解が存在する。SF 模型を YM 理論の有効作用と見なす場合、これらのソリトンは YM 理論の束縛状態、すなわちグルーボールに対応すると Faddeev-Niemi により予測されている。しかしながら Hopf ソリトンの角運動量やパリティが同定されていないので、格子上の数値計算で得られるグルーボールのスペクトラムとの比較は出来ていない。

この博士論文の目的は SF 模型の YM 理論の有効作用としての妥当性を、そのトポロジー的な側面を調べることにより検証することにある。とりわけ、我々は YM 理論のインスタントンが SF 模型においてどのように現れてくるかをしらべ、また Hopf ソリトンのエネルギースペクトラムといった物理的な量について議論する。

SF 模型を $SU(2)$ YM 理論の有効作用として導出する際の鍵となるのが Faddeev-Niemi (FN) 分解といわれる、YM 場の新たな parameterization である。

$$\mathbf{A}=C\,\mathbf{n}+(1+\sigma)\,\mathrm{d}\mathbf{n}\times\mathbf{n}+\rho\,\mathrm{d}\mathbf{n}$$

FN 分解は $SU(2)$ YM 場を質量核上で部分的にゲージ固定することにより得られ、YM 場をベクトル場 C, 複素スカラー場 $\phi=\rho+i\sigma$, および3成分の単位ベクトル場 $\mathbf{n}$ に分解する。この場合の部分的なゲージ固定とは、$SU(2)$ のゲージ対称性のうち、部分群の $U(1)$ 対称性のみを保つものであり、その (1) 変換は $U(x)=\exp[i\theta n^a\sigma^a/2]$ ($U(x)$ は $SU(2)$ の元) で生成される。ベクトル場 C はこの変換のもとで $C\to C+\mathrm{d}\theta$ と変換し、$U(1)$ ゲージ場に相当する。また、ϕ は $U(1)$ 多重項として変換する。この分解のもとで、YM 理論は $U(1)$ ゲージ場に物質場 $\mathbf{n}$ および ϕ が結合した理論と解釈される。$U(1)$ のゲージを固定すると、C, $\mathbf{n}$ および ϕ がそれぞれ2自由度ずつを持ち、合計6自由度となるので確かに $SU(2)$ ゲージ場の質量核上での自由度の数と一致している。この FN 分解のように、YM 理論のゲージ対称性の部分アーベル群の対称性を保つような自由度の取り方は一般にアーベル的射影 (Abelian projection) と呼ばれる。't Hooft らはこのアーベル的射影を用いてカラー閉じ込めの定性的な説明を与えた。アーベル的射影の描像に従えば、YM 理論の真空においては磁気単極子がボーズ凝縮しており、超電導体で電荷がボーズ凝縮しているのとちょうど双対的な（つまり電場と磁場が入れ代わった）状況にある。したがって超電導体でにおいて磁場が閉じ込められるのと双対的に、YM 理論においては電場が閉じ込められていると期待され、このことによってカラーの自由度が閉じ込められていると考えられている。FN 分解の立場では、$\mathbf{n}$ の特異点が磁気単極子に対応するので、$\mathbf{n}$ は YM 理論の低エネルギーの相を記述する秩序パラメターになると考えられる。その場合の有効作用として得られるのが SF 模型である。

以上のような対応のもとで、まず、YM 理論の定性的な議論において本質的な役割を演ずるインスタントン的な配位が、SF 模型においてどのような役割を演ずるかを考察する。アーベル的射影とインスタントンとの関連は 't Hooft らによって提案された Maximal Abelian Projection という定式化のもとで以前にも議論されているが、FN 分解の場合についてはこれまで議論されていなかった。FN 分解は Maximal Abelian Projection と異なった数学的構造を持つため、極めて興味深い結果が得られた。(二つの定式化の差異としては、Maximal Abelian Projection においてはどの方向の $U(1)$ 対称性が保たれるかを指定していないのに対し、FN 分解ではその対称性が $\mathbf{n}$ により陽に指定されていることなどが挙げられる。) 我々はまず、インスタントン数が非零の場合、FN 分解に現れる $\mathbf{n}$ の場が特異点を持たねばならないことを指摘した。この特異点は一般的に4次元時空において閉じた線、すなわちループ

状の軌跡を描く（DDirac の特異線とは異なることに注意）。我々はさらにこの場合、インスタントン数 ν が、$\mathbf{n}$ および $U(1)$ ゲージ場 C の持つトポロジー的な量により一意に決定されることを示した。具体的には、ループの中を通り抜ける C の流束を Φ とし、$\mathbf{n}$ のもつソリトン数と呼ばれる位相不変量を m としたとき、インスタントン数 ν は

$$\nu = m\frac{\Phi}{2\pi}$$

であたえられる。このとき同時に、流束 Φ が整数に量子化されていることが示される。

ここで現れる特異点はもとの YM 場では磁気単極子的な配位に対応するので、我々はこれを磁気単極子と呼ぶ。したがって物理的には、ここで現れるループは磁気単極子の 4 次元時空内での運動の軌跡と解釈でき、流束 Φ はその運動に付随した不変量に相当する。とりわけ、それらの磁気単極子がインスタントンとほぼ一対一の関係にあると解釈される。このことは閉じ込めを説明するために導入された磁気単極子と、カイラル対称性の破れの原因と信じられているインスタントンとの関係を示唆するとも考えられ、興味深い。

また、SF 模型のソリトンのエネルギースペクトラムについても議論した。この模型が $SU(2)$ Skyrme 模型をゲージ化したものとして得られることを用い、エネルギースペクトラムが $SU(2)$ Skyrme 模型のエネルギーによってある制限が与えられることを示した。Skyrme 模型はハドロンの有効理論であり、SF 模型と同様にソリトン解を持つ。この場合のソリトン解は SF 模型の場合と異なり、バリオンに相当すると考えられている。エネルギーに対する制限は、$\mathbf{n}_{\rm sol}$ および $U_{\rm sol}$ をそれぞれ SF 模型、Skyrme 模型の解としたとき、

$$E_{\rm SF}[\mathbf{n}_{\rm sol}] \leq \frac{2}{3}E_{\rm SK}[U_{\rm sol}] \ ,$$

という関係式で与えられる。FN 分解の立場から考えると、これはグルーボールのエネルギーがバリオンのエネルギーによって上から押さえられていることを意味する。もし Hopf ソリトンの量子数が同定されれば、このことは（格子上の数値計算などで得られた）グルーボールのスペクトラムと合わせて、YM 理論の有効理論としての SF 模型の妥当性を検証する可能性がある。