論文内容の要旨

論文題目　Soliton cellular automata associated with crystal base of affine Lie algebra
(アフィンリー環の結晶基底を用いたソリトンセルオートマトン)

氏名　幡山五郎

1990年に高橋・薩摩によって提唱されたソリトン的なふるまいを示すセルオートマトンが導入された。これは、0と（有限個の）1という数字が一次元上に並んでおり、次のルールに従って変化して行くシステムである。

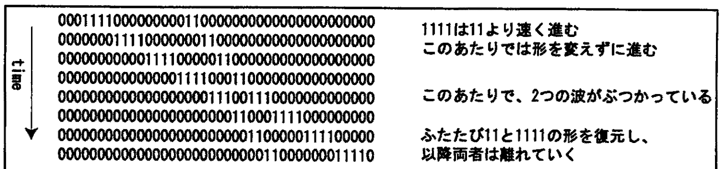
(i) もっとも左にある1を、その右にある一番近い0に動かす。1がいた場所は0にする。

(ii) 残りの1のうち、もっとも左にあるものをその右にある一番近い0に動かす。1がいた場所は0にする。

(iii) 以上の操作をすべての1が移動するまで続ける。

0を空箱、1を箱に1つの玉が入っている状態とみなすと、玉が1つだけ入る箱を1次元上に並べて、その中を有限個の玉がルールに従って動いていく系とも解釈できるので「箱玉系」と呼ばれる。この箱玉系は、11⋯1の並びを波とみなし、その長さを波の高さと読み変えると、このシステムはソリトンが有する下記の性質をもつ（図参照）。

- 波が単独で存在するときは、その形を変えずに進んでいき、その高さが高いほど速く進む。
- 速く進む高いほうの波が低いほうの波を追い越すときにはお互いが干渉しあって形を変えるが、その後充分時間がたつと、ふたたびそれぞれが元の形を復元し、高いほうの波が低いほうの波の先を進んでいく。



箱玉系の例

連続的な値を取る方程式からセルオートマトンを導く「超離散化」によって、Lotka-Volterra 方程式から箱玉系が導かれることがわかり、そのソリトン性が説明された。系のソリトン的な性質を保ちながら、箱に入る玉の容量を増やしたり玉の種類を増やして各々が順々に動いていくようなルールの拡張も知られており、これらをまとめて箱玉系と呼ばれている。

一方、1990 年に柏原によって導入された結晶基底（crystal base）は q というパラメーターを持つ量子群の $q=0$ における表現である。可解格子模型において絶対温度 0 度の状態、すなわち量子群のパラメーター q が 0 となる状態では現象が単純になるであろうという考察から導かれた理論であり、リー代数の表現論を組合せ論的な問題に帰着させることを可能にし、表現論や可解格子模型の研究を行う上での重要な道具となっている。たとえば、反強磁性体と関係する可解格子模型に対してバクスターの角転送行列法によって $q=0$ における一点関数を求めると、その熱力学的極限においてアフィンリー代数の分岐関数が得られることが結晶基底の理論により説明された。

本論文では、箱玉系と結晶基底との関係性を明らかにし、それから結晶基底の理論を通して箱玉系を代数的に拡張したソリトンセルオートマトンを構成してその性質を研究する。以下、章ごとにその内容を説明する。

第 2 章では、まず $U'_q(A_n^{(1)})$ の結晶基底の同型（組み合わせ的 R 行列））を用いて 2 次元可解格子模型を構成し、ほとんどのスピンがそろった境界条件、すなわち強磁性的な境界条件を与える。この模型は絶対 0 度（$q=0$）の状態であり境界条件を与えれば格子上の全ての状態変数の値が確定するので、模型のどちらか 1 次元方向の状態（たとえば横軸）だけに着目すると、その縦軸方向への変化はセルオートマトンのダイナミクスと考えられる。このオートマトンが、簡単な読み替えにより箱玉系と同一であることを示した。

このことを結晶基底の言葉を用いて書き直す。$U_q(A_n)$ の l-階対称表現に対応する $U'_q(A_n^{(1)})$ の結晶基底を B_l とし、$U_q(A_n)$ 表現としての highest weight element を $u_l \in B_l$ とする。箱玉系は、

$$\left\{\cdots \otimes b_{\theta_k} \otimes b_{\theta_{k+1}} \otimes \cdots \in \cdots \otimes B_{\theta_k} \otimes B_{\theta_{k+1}} \otimes \cdots \mid b_{\theta_k} = u_{\theta_k} \text{ for } |k| \gg 1\right\}$$

と同一視できる。空箱が u_{θ_k} に対応し、$\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が各点における箱の容量を表すパラメーターである。そのダイナミクス $T : \cdots \otimes B_{\theta_k} \otimes B_{\theta_{k+1}} \otimes \cdots \to \cdots \otimes B_{\theta_k} \otimes B_{\theta_{k+1}} \otimes \cdots$ は、同型 $B_\infty \otimes \cdots \otimes B_{\theta_k} \otimes B_{\theta_{k+1}} \otimes \cdots \xrightarrow{\sim} \cdots \otimes B_{\theta_k} \otimes B_{\theta_{k+1}} \otimes \cdots \otimes B_\infty$ によって、$u_\infty \otimes \cdots \otimes b_{\theta_k} \otimes b_{\theta_{k+1}} \otimes \cdots \overset{\sim}{\mapsto} T(\cdots \otimes b_{\theta_k} \otimes b_{\theta_{k+1}} \otimes \cdots) \otimes u_\infty$ として表される。

また、こうして定義されたセルオートマトンのいくつかの性質を結晶基底の理論を用いて示された：

(i) 速さ l で進む 1-ソリトンは $U'_q(A_n^{(1)})$ の結晶基底 B_l を用いてパラメトライズ

された。

(ii) 2-ソリトンの散乱は結晶基底の同型を用いて表された。

(iii) エネルギー関数や P シンボルなど表現論の言葉を用いて、箱玉系では知られていなかった保存量が無限個得られた。

第3章では、第2章で結晶基底を用いて定義したセルオートマトンを拡張する。$\mathfrak{g}_n$ を $A_n^{(1)}$ 以外の非例外型アフィンリー環、すなわち $A_{2n-1}^{(2)}, A_{2n}^{(2)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ または $D_{n+1}^{(2)}$ とする。$U_q'(A_n^{(1)})$ のかわりに、$U_q'(\mathfrak{g}_n)$ の結晶基底 $\{B_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ を用いて第2章と同様にセルオートマトンを定義し、それを「$\mathfrak{g}_n$ オートマトン」と呼ぶ。$\mathfrak{g}_n$ オートマトンに対しても、$A_n^{(1)}$ オートマトンと同様な性質 — ソリトン性、1-ソリトンを $U_q'(\mathfrak{g}_{n-1})$ の結晶基底を用いてパラメトライズできる、2-ソリトンの散乱は結晶基底の同型を用いて表される、エネルギー関数を用いた無限個の保存量がある — をもつことを示した。

第4章では、第2,3章でオートマトンを定義するときに用いた非例外型アフィンリー環の結晶基底のテンソル積表現の同型（組合せ論的 R 行列）を結晶基底に働く Weyl 群のオペレーターを用いて分解できることを示す。

一般に組合せ論的 R 行列を具体的に表す表式は得られていないが、オートマトンの定義に使われたある種の定義域に限定すれば、

$$R = (\sigma_B \otimes \sigma) P S_{i_{k+d}} \cdot S_{i_{k+2}} S_{i_{k+1}}$$

と分解して表せることを示した。ここで、σ_B, σ は Dynkin 図の同型に対応するオペレーター、S_i は結晶基底に働く Weyl 群のオペレーター、P は置換である。またこの分解を用いて、$\mathfrak{g}_n$ オートマトンのダイナミクスに対して箱玉系としての解釈を与えることができた。

以上が本論文の概要である。代数的な立場から箱玉系を眺めることにより、未知の保存量が得られ系統的な拡張も行えた。また $\mathfrak{g}_n$ オートマトンの性質を調べることにより、結晶基底の同型がオートマトンの散乱で表せ、Weyl 群のオペレーターを用いて分解できることが示せた。箱玉系と結晶基底の双方の理論に対するこれらの発展をまとめたものが本論文である。