論文審査の結果の要旨

氏名　幡　山　五　郎

ソリトン方程式は通常、非線形偏微分方程式として物理学に登場する。近年、空間の離散化や時間の離散化に関する研究が活発に行われている。物理的な要請とともに、微分方程式の解法などにおける数値計算の基礎を調べる目的があるからである。独立変数と従属変数をすべて離散化した力学系をセルオートマトンという。本論文は、ソリトン的振る舞いを示すセルオートマトンとして知られていた「箱玉系」を、可解格子模型の研究において導入された結晶基底を使って定式化し、また、セルオートマトン模型の拡張をはかることを目的としている。

本論文は第1章〜第5章と付録A, Bから構成される。第1章では、本論文研究にいたる簡単な歴史と論文の構成がまとめられている。

第2章では、まず量子アフィン代数 $U'_q(A_n^{(1)})$ の結晶基底の同型を用いて2次元可解格子模型を構成し、ほとんどのスピンがそろった境界条件、すなわち、強磁性的な境界条件を与える。この模型は絶対0度(量子群パラメータ $q=0$ に相当)の状態であり、境界条件を与えれば格子上のすべての状態変数の値が確定する。したがって、2次元格子のどちらか1方向(たとえば横軸)上の状態変数だけに着目すると、他方向(縦軸方向)での変化はセルオートマトンのダイナミックスと考えられる。こうして、このオートマトンが、簡単な読みかえにより箱玉系と同一であることが示される。このようにして定義されたセルオートマトンは、次の性質をもつことを、結晶基底を使って示すことができる。

1) 速さ l で進む1-ソリトンは $U'_q(A_n^{(1)})$ の結晶基底 B_l を用いて表される。

2) 2-ソリトンの散乱は結晶基底の同型(組み合わせ的R行列)を用いて表される。

3) エネルギー関数やPシンボルなどの表現論の用語を用いて、保存量を無限個得ることができる。

上で得られる保存量は従来知られていないものである。

第3章では、結晶基底を用いて定義されるセルオートマトンを拡張する。すなわち、第2章で述べた $A_n^{(1)}$ の代わりに、それ以外の非例外型アフィンリー環 $\mathfrak{g}_n=A_{2n-1}^{(2)}, A_{2n}^{(2)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ または $D_{n+1}^{(2)}$ を採り、考察を進める。一般に、$U'_q(\mathfrak{g}_n)$ の結晶基底 $\{B_l\}$ を用いてセルオートマトンを定義し、それを「$\mathfrak{g}_n$ オートマトン」とよぶ。$\mathfrak{g}_n$ オートマトンに対しても、$A_n^{(1)}$ オートマトンと同様な性質(上記1)-3))があることが示される。興味深い問題の1つとし

て、同じ長さ(同じ速さ)のソリトンが共存しうるか、また、共存するならばどのような動的振る舞いをもっているか、がある。この問題は初期条件の設定と関連して残された問題である。

第4章では、$\mathfrak{g}_n$ オートマトンを定義するときに用いた非例外型アフィンリー環の結晶基底のテンソル積表現の同型(組み合わせ論的 R 行列)を、結晶基底に働く Weyl 群のオペレーターを使って分解できることを示す。一般に組み合わせ論的 R 行列を具体的に表す表式は得られていないが、充分に広い定義域において分解できることが証明される。この分解を用いると、$\mathfrak{g}_n$ オートマトンのダイナミックスと箱玉系の規則がより適確にとらえることができる。第5章は全体のまとめ、付録 A, B は本文において用いられる数学的用語の説明に用いられている。

以上、本論文提出者は、ソリトンセルオートマトンを代数的な立場から定式化し、可積分理論との関連を明らかにした。結晶基底を用いた一般的なソリトンオートマトンの構成、保存量の表現、Weyl 群オペレータを用いた散乱状態の記述は新しい。箱玉系においては時間発展が規則として与えられ、力学系との関連は超離散という極限に依っていた。今回の研究によって、それとは独立な視点が確立された。本論文は、当該研究分野に新しい知見を加え、その発展に寄与するものであることを審査員全員で認めた。

なお、本論文第2,3,4章は、国場敦夫、高木太一郎、尾角正人、山田泰彦、樋上和弘、時弘哲治、井上玲との共同研究であるが、論文提出者が主体となって解析及び検証を行ったもので、論文提出者の寄与が充分であると判断する。

従って、博士(理学)の学位を授与できると認める。