論文内容の要旨

論文題目　*Construction of Discrete Integrable Systems and Soliton Cellular Automata based on the Algebraic Structure*
(代数的手法による離散可積分系とソリトンセルオートマトンの構成)

氏名　山﨑（井上）玲

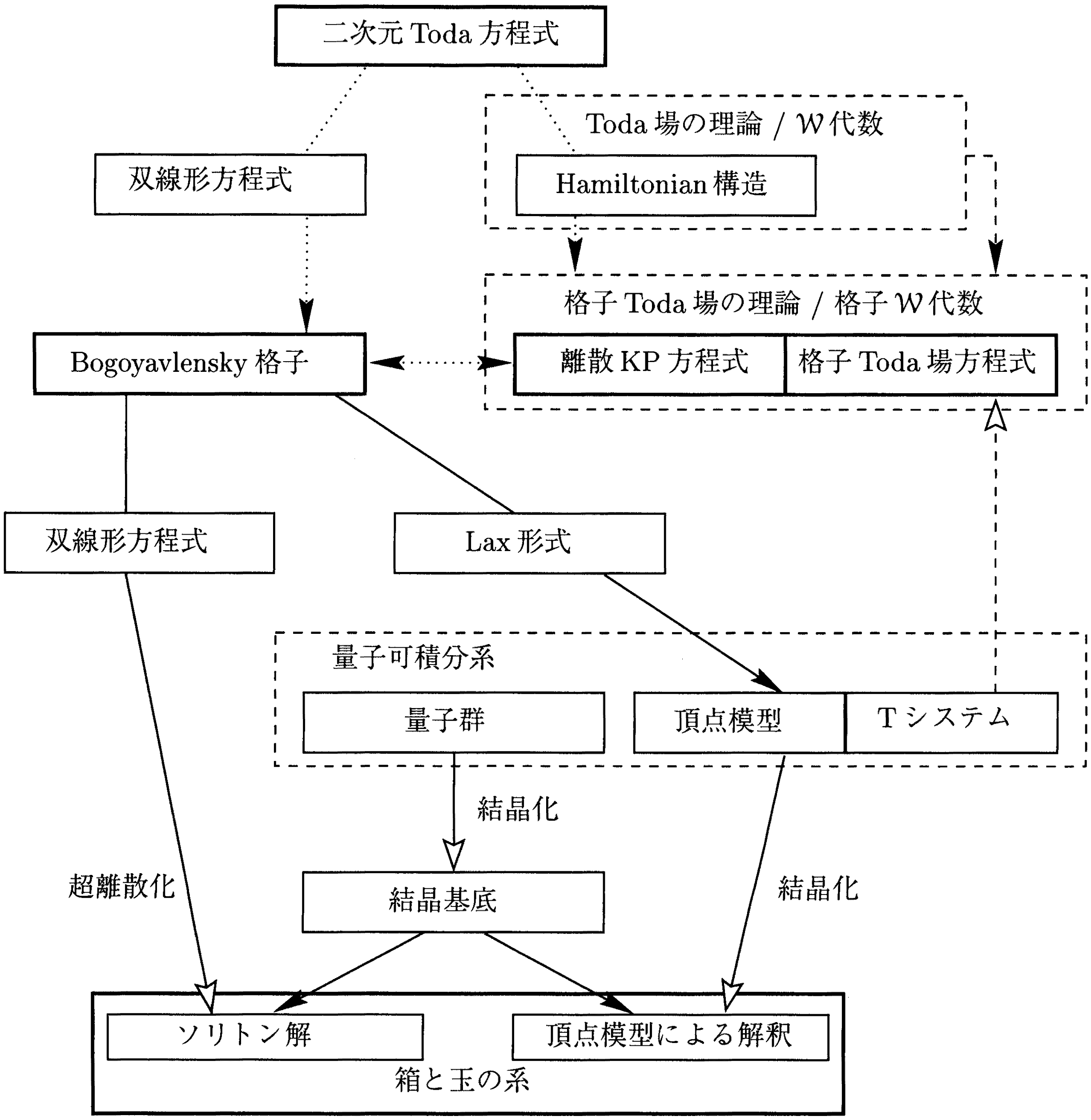
「可積分系」とは、初期値問題を解くことができる力学系を指す。一般に、系の自由度数の独立な保存量を持てば、Liouvilleの定理により可積分である — この様な視点による非線型方程式の研究はKorteweg-de Vries(KdV) 方程式に始まった。KdV 方程式は、百年程前にScott-Russellにより発見された浅水波を記述する非線型偏微分方程式で、この方程式の特徴的な孤立波解は後にソリトンと命名された。当初ソリトンはこの方程式に固有の解だと考えられていたが、その後の研究により、ソリトンを記述する方程式は実に無限個存在することが明らかになった。これらソリトン方程式は、その背後に豊かな解析的、代数的構造を持っており、その研究は今日の数理物理学に新しい分野を切り拓いた。

ソリトン方程式に代表される可積分系は様々な立場から研究されており、モデルの可積分性を保った量子化・離散化 (差分化)・拡張も盛んに議論されてきた問題である。それらと並行して発展したモデルの対称性に関する研究は、量子群や共形場の理論等現在の数理物理学における重要な理論に結び付いている。また最近では、セルオートマトン (CA) と可積分系の関係についての議論が興味を集めている。CA は、系の座標だけでなく力学変数の値も離散的な値を取る時間発展のモデルの総称で、自然科学の様々な分野において計算機の発展とともに盛んに研究されてきたテーマである。CA の時間発展を記述する方程式や、CA を数理的に扱える模型と結び付けることは、計算機と数理的解析をつなぐ重要な課題であり数理物理としても興味深い問題である。

本論文では、ソリトン方程式の離散化を議論する。まず系の座標を離散化し、次に力学変数のとる値を離散化して、最終的にはソリトンの様に振る舞う解を持つ CA、ソリトンセルオートマトン (SCA) を導き出す。一般に微分方程式の離散化は一意には決まらないが、元のモデルが持つ可積分性に基づいた方法によって可積分性を保った離散化を実現することが出来る。ここでは、(a) 双線形方程式によるソリトン解の離散化、(b) モデルの代数構造に基づいた離散化を論ずる。これらは、その非線形性のために解くのが困難とされていたソリトン方程式の解法を研究する過程で発見された手法に基づいている。まず (b) は、1967 年に発見された Lax 形式に関係している。Lax 形式は、非線形方程式の画期的な解法である逆散乱法で導入され、方程式の Liouville の意味での可積分性を証明し、その背後にある対称性を知る有力な手掛かりとなった。一方、(a) の双線形方程式は、ソリトン解を導く強力な方法として 1970

年代に導入された。これは、元の方程式を τ 関数の満たす双線形方程式に変換し、後者を解くというものである。さらに本論文では、離散化されたことで明らかになった、モデルどうしの関係や古典・量子可積分系間の興味深い関係を明らかにする。

本論文は大きく分けて三つの部分から成り、その概要は以下の図のとおりである。我々の議論は、重要なソリトン方程式の一つである「二次元 Toda 方程式」から出発し、方法 (a)、(b) による離散化を用いてそれぞれの離散可積分系「Bogoyavlensky 格子」と「格子 Toda 場方程式」を導く (第一部 — 点線矢印)。Bogoyavlensky 格子の離散化をさらに進めると、SCA「箱と玉の系」が得られる (第二部 — 実線矢印)。それぞれの導出過程で、モデルの対称性やモデル間の関係を調べる。一方、(b) に基づいた格子 Toda 場方程式の拡張も行う (第三部 — 破線矢印)。



具体的には以下の様な議論を行う。まず第一部では、二次元 Toda 方程式の離散化を論ずる。二次元 Toda 方程式は、一次元格子上の原子間相互作用を記述する Toda 格子方程式の拡張として導入されたものである。このモデルの Hamiltonian 構造を Lie 代数の立場で解釈すると、様々な Lie 代数に付随したモデルの拡張が可能になる。この様な代数構造に基づいた Toda 方程式の可積分性の議論は、Toda 場の理論と呼ばれている。離散化は、方程式が持つ可積分性に因る二つの方法 (a) 双線形方程式によるソリトン解の離散化、(b)Toda 場の理論に基づいた Hamiltonian 構造の離散化を用い、それぞれの方法によって Bogoyavlensky 格子、格子 Toda 場方程式を得る。特に格子 Toda 場方程式の可積分性は、格子 $\mathcal{W}$ 代数で記述される離散 KP 方程式が持つ無限個の独立な保存量の存在によって保証される。方法 (a)、(b) は全く違った差分方程式を導くかの様にみえるが、実は Bogoyavlensky 格子と、離散 KP 方程式は変数変換で結び付く。さらに方法 (b) によって、格子 Toda 場方程式の量子化も議論する。

第二部では、Bogoyavlensky 格子から箱と玉の系を導出する方法を述べる。箱と玉の系は、一次元格子上に並んだ「箱」の中に入れられた何種類かの有限個の「玉」をあるルールに従って時間発展させるモデルで、ソリトンの様に振る舞う玉の並べ方があることが知られている。まず、「超離散化」の方法を説明すると共に、これとは異なる新しい方法「結晶化 (crystallization)」を紹介する。これら二つの方法は、Bogoyavlensky 格子のソリトン解と、可積分な Hamiltonian 構造のそれぞれに立脚している。超離散化は、Bogoyavlensky 格子を双線形化した方程式に対する極限操作で、SCA の時間発展方程式を導出する。一方結晶化は、Bogoyavlensky 格子の Lax 形式を量子化して得られる頂点模型に対する極限操作である。多くの統計力学的な模型と同様、この頂点模型でも同じ境界条件に対する各辺の状態は一般に一意には決まらないが、結晶化の極限操作によって一意に決定され、それが箱と玉の系の時間発展と一致する。各辺の状態が一意に決まった状態は、温度ゼロの極限で系全体がある基底状態に落ちた場合に対応している。「結晶化」は、やはり最近示された箱と玉の系と A 型 Lie 代数の結晶基底 (crystal base) との関係とともに、量子可積分系と SCA の新たなつながりを与えるものとして興味深い。次に、超対称性を持つ Lie 代数に付随する結晶基底によって記述される箱と玉の系を論ずる。これは、もとのモデルが Boson 的な性質を持つ玉を記述していたの対し Fermion 的な玉も加えるような拡張になっている。また、超離散化と結晶基底の理論の両方を用いて箱と玉の系のソリトン解を構成する。このソリトン解は超離散双線形方程式を満たすが、ソリトンの散乱因子は crystal 同型写像から求められる。ここにもソリトン系と量子可積分系の興味深い関わりが現れている。

第三部では、方法 (b) に基づいて格子 Toda 場の理論を様々な Lie 代数に対して構成し、格子 Toda 場方程式の拡張を議論する。第一部で紹介した、二次元 Toda 方程式とその離散化である格子 Toda 場方程式は、A 型の Lie 代数に関係している。Toda 場の理論自体は任意の Lie 代数に対して構成されているが、ここではその離散化を目標に、任意の有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対する格子 Toda 場方程式を議論する。まず Hamiltonian 構造を離散化して、格子 $\mathfrak{g}$-Toda 場方程式を得る。この方程式は、τ 関数を導入すると T システムと呼ばれる関数方程式と関係付けられる。T システムは、様々な Lie 代数に付随する量子可解模型の可換な転送行列の満たす関係式で、A 型の場合には有名な双線形方程式、Hirota-Miwa 方程式に一致することが知られている。ここで導入された格子 $\mathfrak{g}$-Toda 場方程式と T システムの関係はこの関係を一般化している。また、格子 $\mathfrak{g}$-Toda 場方程式の代数構造は $\mathcal{W}$ 代数の q 変形の議論で扱われているものと本質的に同じであり、今後、格子 $\mathcal{W}$ 代数の構成につながると考えられる。

以上のように本論文では、可積分性を持つモデルの (a) ソリトン系としての性質と、(b) 代数的構造に基づいて、モデルの離散化と SCA を議論した。また、元のモデルの持つ側面 (a)、(b) の関係、SCA と古典ソリトン系や量子可積分系との関係を知る新しい視点を獲得した。数理物理だけでなく、自然科学の様々な分野で行われている CA を含む離散的なモデルの研究が、ここで発見・導入された幾つかの手法を用いて発展することを期待している。