

# 論文審査結果の要旨

氏名 山崎 (井上) 玲

本学位論文は8章によりなり、その構成は主に次の3つの部分に分けることができる。

まずパート1では後のパートで述べる本学位論文の主結果を理解する上で本質的な離散可解系の結果がまとめられている。これらは山崎氏が主に修士課程の間に研究した内容でもある。低次元の可解系の代表的な例として有名な2次元戸田場の理論があげられるが、この系は2次元の場の理論であり、解ける場の理論のプロトタイプとして様々なアプローチにより研究されている。そのうちのひとつとしては例えば $\tau$ 関数を用いた双線形方程式などがある。第一章では戸田理論の双線形方程式の離散化をまとめ、第二章ではそれと関連深い Bogoyavlensky 格子の可解構造をまとめている。この模型における Lax 形式をワイル基底を用いて書き下すことがパート2で述べられる本学位論文の主結果を理解する上で本質的である。第三章では戸田場の離散化の問題を対称性の観点から眺めている。特にその非線形な対称性である格子W代数の解説を行っている。このような非線形な対称性はリー環でラベルづけられることが知られているがこの章ではもっとも構造が単純な A 型と呼ばれるものについての結果がまとめられている。これらの結果についてはパート3で任意のリー環への拡張が議論される。第四章では3次元における離散可解系についての山崎氏の考察が述べられている。

パート2においては、箱玉系という Cellular Automata システムについて考察しているが、この部分が本学位論文の主結果と見なすべきものである。この系は1次元的に無限個並んだ箱の中の玉をある規則により移動させていくものであるが、何個か並んだ玉がソリトンのような振る舞い（時間を進めても集団の様子が変わらない）を行う事が知られていたため、何らかの可解構造があることが予想されていた。第五章ではまず、時弘氏らにより議論された Bogoyavlensky 格子の双線形方程式から Ultra discretization という手続きを経て Cellular Automata の時間発展が得られることをまとめている。この意味で箱玉系の可解性はある程度明らかになったのであるが、山崎氏は樋上氏との共同研究でこの系の可解性を示すもう一つの考え方、つまり Lax pair の手法を当てはめることが可能であることを発見した。つまり Bogoyavlensky 格子で得られていた Lax pair を適当な極限(Crystallization)をとることにより Cellular automata のシステムが可解格子の系と同一視できることを示している。本来格子統計モデルではいろいろな配位を全て足しあげることにより分配関数を得るわけであるが、結晶化（あるいは絶対零度）の

極限の元では基底状態以外の状態はエネルギーのコストが非常に大きくなってしまふため分配関数の計算には現れてこない。一方基底状態は系の境界の値(=初期値)を決めてしまえば内部の値が全て決まってしまう。したがって Cellular automata のような決定論的な現象を統計系の手法を用いて解析できてしまうことになる。このような考え方を導入することにより例えば系の無限個存在する保存量などを見通しよく構成できるので、山崎氏の結果は箱玉系の理解の上で有用な結果であると考えることができる。

次に箱玉系は戸田場の理論と同様にリー環を用いて一般化、および分類をすることができている。山崎氏は上記の結果と併せて第六章でスーパーリー環に対応する拡張を考察した。特にスーパーリー環の場合について結晶化された基底について、そこに作用する柏原演算子の性質をまとめ、そこから得られる新しい箱玉系の時間発展のルールを与えている。この拡張された系では従来の箱玉系に現れていた励起とは少し振る舞いが異なるソリトンが現れてくる。それらは排他的な振る舞いを示し、従来のものとは違った「フェルミオン」的な状態を記述しているらしい事が示唆している。この系については現時点ではその系が実際可解であるかなどについては未解決であるが、これからの分野として興味深い。第7章は箱玉系や関連する Bogoyavlensky 格子について具体的なソリトン解の形とそこに作用する格子W代数の性質についてのまとめである。

パート3(第8章)では一般の単純リー環に関連づけられる格子戸田場についての考察を行っている。最初に連続場の理論の場合についてどのような拡張をなされているかをまとめた後、格子の場合について離散変数の Poisson 括弧式がどのように定義されるべきかを議論した後、 $\tau$  関数やTシステムとの関連を簡単にまとめてある。

以上のように離散戸田場のリー環を用いた拡張、箱玉系の可解性を Lax pair を用いて書き下した事、さらに新しいタイプの箱玉系の提唱がこの学位論文の主結果である。なお、この論文の多くの結果は樋口氏との共同研究に基づいているが山崎氏は十分に主体的に論文の内容に貢献したことが認められる。

したがって、審査委員全員一致で博士(理学)の学位を授与できると認めた。