論文内容の要旨

論文題目　　Semidefinite Programming Relaxation for Control System Design
(和訳　半正定値計画緩和による制御系設計法)

氏名　　小西克巳

現在，制御系設計において，制御系仕様が複雑化し，全ての制御系設計仕様を満たす制御系を解析的に求めることが困難になってきている．そのため，制御系設計仕様を制約式で表し，その制約を満たすような数理計画問題へ定式化し，数値計算によって制御系を設計する方法が研究されている．そのなかでも，T. Iwasaki，R. E. Skelton らによって確立された線形行列不等式系 (Linear Matrix Inequalities, LMIs) による制御系設計が注目されている．H_2 ノルムや H_∞ ノルムに基づく制御系設計問題や，その他の制御系設計問題が LMI として表現することができる．LMI を用いた制御系設計の利点は，LMI で表される領域が凸領域であるという点にある．そのため，制御系設計仕様が LMI で表現されれば，制御系設計問題は凸最適化問題として解くことができる．さらに，ＬＭＩを制約とする数理計画問題には，J. E. Nesterov，A. S. Nemirovsky らによって内点法に基づく多項式時間アルゴリズムが与えられており，実際にも短時間で解けるという利点もある．

しかし，LMI は簡単に解けるという利点の反面に表現能力に劣るという欠点がある．多くの制御系設計仕様は双線形行列不等式 (bilinear matrix inequality, BMI) や 2 次行列不等式 (quadratic matrix inequality, QMI) で表現される．BMI は，その表現能力の高さ

に魅力があるが，BMI で表される領域は非凸領域であり，BMI を制約問題とする数理計画問題は O. Toker らによって一般にはＮＰ困難であることが示されており，解くのは難しい．BMI を制約とする最小化問題に対する解法としては，K. C. Goh，H. Fujioka, M. Kawanishi，高野，M. Fukuda らによって分枝限定法を用いた厳密解法が提案されている．QMI は BMI を含み，より一般的な行列不等式であるが，その性質はほとんど調べられておらず，解法も与えられていない．ただし，BMI 問題に対する厳密解法の多くが適用可能である．本論文の目的は，制御系設計問題の性質を考慮した BMI 問題および QMI 問題の分枝限定法に基づく厳密解法を与えることである．

分枝限定法に基づく厳密解法では，精度の良い下界を求めることが重要である．本論文では，精度の良い下界を与える方法として，SDP 緩和問題（Semidefinite Programming 緩和問題）を用いる方法を提案している．SDP 緩和は非凸２次計画問題を解くために提案された手法で，M. Kojima, L. Tunçel らによって凸２次不等式を用いた緩和と同じ精度を持つことが示されている．また，SDP 緩和問題は凸最適化問題として，内点法に基づくアルゴリズムで短い時間で解くことができるという利点がある．M. Kojima らは conic inequality という表現を用いて，SDP 緩和を拡張し，QMI に適用できることを示している．

本論文では，QMI 問題へ SDP 緩和を適用した場合の性質を導くために，以下のように表される elemen-wise QMI problem を扱っている．

$$\text{Minimize } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n :\ F(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}_-^m,\ \forall F(\cdot) \in \mathcal{P}\right\},\ \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q} \\ \mathcal{Q} &\equiv \left\{F(\boldsymbol{x}) \equiv F_{00} + 2\sum_{i=1}^n x_i F_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j F_{ij} :\quad F_{ij} = F_{ji} \in \mathcal{S}^m\right\} \end{aligned}$$

ただし，$\mathcal{S}^m$ は対称行列，$\mathcal{S}_-^m$ は半負定行列を表し，$\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^n$ および $\mathcal{P}$ は与えられたものとする．

本論文は，QMI 問題に対する SDP 緩和問題，凸２次不等式を用いた緩和問題を導出し，この２つの緩和問題が等しいことを示している．また，内点許容解の存在を仮定すれば，QMI 問題に対する Lagrange 双対緩和問題と SDP 緩和問題が等しい下界値を与えることが示されている．これらの結果は，非凸２次計画問題に対する SDP 緩和と同じ性質が QMI 問題に対する SDP 緩和でも成り立つことを示している．

次に本論文では，制御系設計のための SDP 緩和を提案している．制御系設計問題における QMI 問題 (BMI 問題も含む) は，各変数は行列で表され，行列の積を含む行列不等式で与えられる．変数が全てスカラーで表現されている elemen-wise QMI problem は，制御系設計問題を表すには冗長である．この elemen-wise QMI problem を用いて制御系設計問題を記述し，SDP 緩和をそのまま適用すると，SDP 緩和問題の変数の数が膨大になり，計算コストも増大する．そのため，本論文では制御系設計問題を表す QMI 問題として，以下のような matrix-based QMI problem を定義している．

$$\text{Minimize } \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{V} \quad \text{subject to } \boldsymbol{V} \in \mathcal{G} \cap \mathcal{B}_M$$

$$\mathcal{G} \equiv \left\{ \boldsymbol{V} \in \mathcal{R}^{mn\times m} : \quad G(\boldsymbol{V}) \in \mathcal{S}^m_-, \ \forall G(\cdot) \in \mathcal{P}_M \right\}, \ \mathcal{P}_M \subseteq \mathcal{Q}_M$$

$$\mathcal{Q}_M \equiv \left\{ G(\boldsymbol{V}) \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \left\{ V_i V_j^T G_{ij} + G_{ij}^T V_j V_i^T \right\} : \ G_{ij} \in \mathcal{R}^{m\times m}, \ V_0 = I_m \right\}$$

ただし，$\mathcal{B}_M$ は変数行列 $\boldsymbol{V}$ の変域を表し，$\boldsymbol{C} \in \mathcal{R}^{m\times m}$ および $\mathcal{P}_M$ は与えられたものとする．

この問題は，行列不等式で表される制御系設計問題のほとんど全てを表すことができる．このように定義された matrix-based QMI problem の緩和問題として，以下のような matrix-based SDP 緩和問題を提案している．

$$\text{Minimize } \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{V} \quad \text{subject to } \boldsymbol{V} \in \hat{\mathcal{G}} \cap \mathcal{B}_M$$

$$\hat{\mathcal{G}} \equiv \left\{ \boldsymbol{V} \in \mathcal{R}^{mn\times mn} : \begin{array}{c} \exists W \in \mathcal{S}^{mn} \text{ such that } \begin{bmatrix} I_m & \boldsymbol{V}^T \\ \boldsymbol{V} & W \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_+^{m(1+n)} \text{ and} \\ \boldsymbol{G} \otimes \begin{bmatrix} I_m & \boldsymbol{V}^T \\ \boldsymbol{V} & W \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_-^m, \ \forall \boldsymbol{G} \in \mathcal{P}_M \end{array} \right\}.$$

本論文では，matrix-based SDP 緩和問題が element-wise QMI problem に対する SDP 緩和問題と等しいことを示している．matrix-based SDP 緩和問題は従来の SDP 緩和と同じ性能を持ちながら，下界値を求める際の変数の数を減らすことができるという特徴を持つ．例えば，$m \times m$ 行列が n 個で制約が表される問題では，従来の SDP 緩和を用いると $m^4(1+n)^2$ 個の変数が必要であるが，matrix-based SDP 緩和を用いれば，変数の数は $m^2(1+n)^2$ 個ですむ．このように，本論文で提案する matrix-based SDP 緩和を用いることで，制御系設計における QMI 問題 (BMI 問題) の計算コストを大幅に削減できる．

次に本論文では，matrix-based QMI problem に対する厳密解法として，matrix-based SDP 緩和問題を用いた分枝限定法を提案している．提案する手法を用いることで，信頼度 ε で matrix-based QMI problem の厳密解が得られる．本論文では，得られる解が真の解に漸近収束することを示し，matrix-based QMI problem の特別な場合である matrix-based QMI 固有値最小化問題においては，有限時間で解が得られることを示している．

最後に数値例によって，本論文で提案する手法の有効性を示している．ランダムに生成された QMI 固有値最小化問題および BMI 固有値最小化問題に対し，matrix-based SDP 緩和を用いた手法 (m-SDP 法) と Fujioka, Hoshijima が提案する手法 (FH 法) を，それぞれ適用した．QMI 固有値最小化問題では，m-SDP 法が FH 法よりも短い時間で解けることが示され，BMI 固有値最小化問題でも，行列の大きさが大きくなれば，m-SDP 法が有効であることが示されている．また，図 1に示すような系に対して，H_∞ ノルム制約下で H_2 ノルムを最小化する出力フィードバック行列を求める Mixed H_2/H_∞ 制御問題を扱っている．この問題は BMI 問題となり，提案する手法により，図 2のように上界値 (upper bound) と下界値 (lower bound) が更新され，CPU TIME が 18320.3[sec] で H_2 ノルムを最小値にする出力フィードバック行列が得られる．

本論文で提案する matrix-based SDP 緩和は，制御系設計における BMI 問題および QMI 問題の性質を考慮したものであり，精度が良く，かつ，計算コストが少ない緩和問題を与えるものである．また，本論文で提案する厳密解法は，実際の制御系設計問題を解くことができる．本論文は，数値最適化による制御系設計法の研究という分野に貢献するものである．

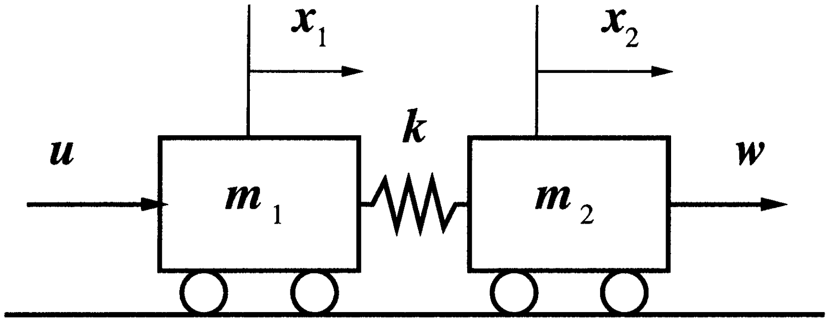

図 1: Two mass - one spring system.

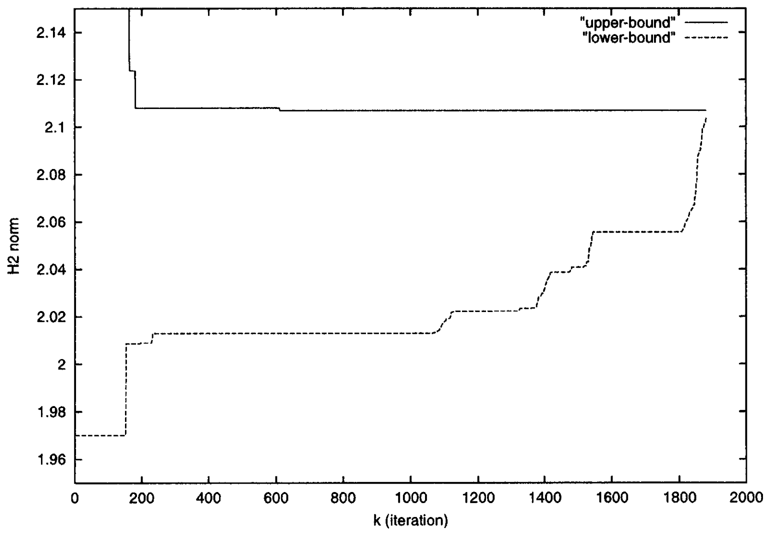

図 2: Progress of upper and lower bounds in the mixed H_2/H_∞ control problem.