

論文の内容の要旨

論文題目 Instabilities and Nonlinear Structures of Rotating Plasmas
—Non-neutral Plasmas and Galaxies—

和訳 (回転するプラズマにおける不安定性と非線形構造
—非中性プラズマと銀河—)

氏名 近藤 重雄

1 序

本研究では回転する多粒子系における集団的挙動によって作られる巨視的不安定性と非線形構造形成に関する理論解析を行なった。回転という現象は自然界の至る所に現れ古くから研究されてきた現象であるが、近年この回転流を積極的に利用した次世代の核融合炉が提唱され、また宇宙全体の角運動量の総和がゼロでない値を持つかという問題が未解決であるなど、現在も新しい問題を含んでいる。

回転が本質的な役割を演じる多粒子系として磁場中に閉じ込められた非中性プラズマおよび銀河に着目した。これらの系は強い自己場と回転が本質的な役割を持つという点で共通に特徴付けられる。非中性プラズマは従来の放電によって作られる中性プラズマとは異なり、電荷の偏りのために強い自己電場が生成される。このため圧力が無視できる場合でも閉じ込めには磁場が必要である。回転と背景磁場によって生じるローレンツ力を、自己電場による力および遠心力と均衡させることで定常状態が作られる。一方、銀河は回転がなければ自己重力でつぶれてしまうため、その構造の維持のためには回転が必要である。

このような相似性に基づいて銀河を集団現象を示す一種のプラズマとみなし(銀河のプラズマモデル)、その巨視的な振舞を考察する。これらの回転系における振動、波

動、不安定性、非線形構造形成などの集団現象について、プラズマと銀河の対応関係を含めてこれまで知られていなかった回転系の集団現象を理論的に明らかにする。

解析には流体方程式系を用いる。非中性プラズマに対する方程式は次で与えられる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{e}{m}(-\nabla\phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{e}{\epsilon_0}n, \quad (3)$$

ここで n は粒子密度、 \mathbf{v} は流れの速度、 ϕ は静電ポテンシャルである。一方、銀河に対する流体方程式は次で与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla\phi, \quad (5)$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (6)$$

ここで ρ は質量密度、 ϕ は重力ポテンシャルである。(2) 式と (5) 式の右辺第 1 項の符合と同じ式の右辺第 2 項の有無を除き、これらの方程式系は同一である。(2) 式の右辺第 2 項については、回転によるコリオリ力がローレンツ力と等価な働きをするため、回転系である銀河に対しては本質的な相違でない。したがって非中性プラズマと銀河における相違点は (2) 式と (5) 式の右辺第 1 項の符合のみである。この相違は同符合の荷電粒子が反発力を持つのに対し、星同士は引力を持つことを表す相違である。

2 非中性プラズマと銀河の比較

多くの銀河がなぜ渦巻構造を示すかについて、素朴に考えれば銀河の回転角速度が径方向に進むにつれ減少するために、物質に固定された濃淡のパターンが引き延ばされて渦巻になるようにも見える。しかしこの考えに基づくと、銀河の年齢とその回転周期から考えるに、観測される一般的な渦巻構造よりもはるかにきつく巻き込んでいなければならない、mixing によって渦巻構造が消滅してしまうという矛盾が発生する（これを winding dilemma と呼ぶ [1]）。この問題を解決するために C.C.Lin と F.H.Shu によって、銀河の渦巻構造を波動のパターンとして理解する密度波理論が提唱された [2]。

銀河に対する流体方程式 (4)-(6) に対し、簡単化のため銀河が薄いディスクではなく z 軸方向に十分長いと仮定して全ての物理量 $\Psi(r, \theta, t)$ を

$$\Psi(r, \theta, t) = \Psi_0(r) + \Psi_1(r) \exp[i(\omega t - k(r)r - m\theta)] \quad (7)$$

と置き、完全に2次元的な線形解析を行うことにする。 $k(r)$ は r よりも十分ゆっくりに変化することとし ($|k'(r)/k| \ll 1/r$)、さらに銀河の渦巻構造が十分きつく巻き付いている ($|k(r)r \ll m$) と仮定すると、(4)-(6) 式より次の局所的な分散関係式が得られる。

$$(\omega - m\Omega_0)^2 = \kappa^2 - \gamma_J^2 \quad (8)$$

ここで $\Omega_0(r)$ は銀河の回転角周波数、 $\gamma_J^2 = 4\pi G\rho_0$ は Jeans 不安定性の成長率、 κ は epicyclic 周波数で、

$$\kappa^2 = 4\Omega_0^2 \left[1 - \frac{r}{2\Omega_0} \frac{d\Omega_0}{dr} \right] \quad (9)$$

で与えられる。角速度 Ω_0 で銀河とともに回転する回転座標系から個々の天体の運動を観測すると、コリオリ力によって楕円軌道を描くことが知られている。epicyclic 周波数 κ はその周波数であり、これはプラズマのサイクロトロン周波数 ω_c に対応する。また Jeans 不安定性の成長率 γ_J は自己重力による崩壊の成長率であり、プラズマでは $i\omega_p$ (ω_p はプラズマ周波数) に相当する。このことから (8) 式はプラズマでは高域混成振動の周波数 ω_h を与える式

$$\omega_h^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2 \quad (10)$$

に対し、回転によるドップラー効果 $m\Omega_0$ を加えた式であることが分かる。

プラズマの高域混成振動は磁場に垂直方向の静電振動である。これと同様に銀河の密度波は回転によって作られる渦度ベクトル (方程式の上では磁場と等価) に対し垂直方向の振動と解釈することができる。回転による効果 (κ^2) が大きく $\kappa^2 - \gamma_J^2 > 0$ ならば Jeans 不安定性は抑えられるが、その逆の場合には Jeans 不安定性が発生し、 ω は複素数になる。

銀河が z 軸方向に長いという仮定をせず、 z 軸方向には無限に薄いという仮定を置くと、ポアソン方程式 (6) そのものではなく C.C.Lin らによって導かれた近似式

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \sim -\frac{2\pi i G k}{|k|} \rho_1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \sim 0 \quad (12)$$

を用いなければならない。この時には分散関係式 (8) は次のように修正される。

$$(\omega - m\Omega_0)^2 = \kappa^2 - 2\pi G\rho_0|k| \quad (13)$$

(8) 式では ω が k に依存せず、波動ではなく振動であったが、(13) 式に見られるように無限に薄いという仮定によって ω が k に依存し、伝播する波としての性質が現れる。

3 回転系における線形波動および線形不安定性

3.1 diocotron 波の物理機構

diocotron 波は磁場中におかれた非中性プラズマに特有の静電波である [3]。電子プラズマのスラブモデルにおける diocotron 波の物理機構を図 1 に示す [4]。 x 軸方向に有限の厚さを持ち ($|x| \leq 1$)、 yz 方向には無限に広がった非中性プラズマを考える。磁場は z 方向に一様に印加されているものとする。簡単のため 0 次のプラズマの密度は一様であるとする。プラズマの表面が図のように揺らぐと、近似的にプラズマ表面に面電荷が追加されたとみなすことができるので、この表面電荷が周囲に揺動電場を作り、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトを介して反対側の表面をも変化させる。反対側に作られた面電荷が新たな電場を作り、再び $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトを介して初めの表面付近のプラズマを揺さぶる。このように 2 つの表面上に立つ波が $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトを介して相互作用する。ここで 0 次の流れにシアが存在し、2 つの表面付近の流速が異なる場合には、ある条件下においてこれらの表面波が相互にロックされ、波が成長して不安定となる。

3.2 円柱プラズマと円柱銀河における安定な diocotron 波

3.1 節において考えたスラブモデルは銀河のプラズマモデルでは平衡状態が存在しないため成り立たない。しかし回転によって平衡している円柱モデルの上に立つ diocotron 波は可能である。図 2 で示された 2 つのモデルを考える。(a) は非中性プラズマ円柱であり、(b) は銀河の円柱モデルである。両者とも回転によって平衡している。このような平衡状態において (1)-(3) 式と (4)-(6) 式を線形化することで円柱表面に立つ揺らぎを解析すると次のような分散関係式が得られる。

$$[\omega - (l-1)\Omega_0][\omega - (l-1)\Omega_0 - \omega_c] = 0, \quad (\text{非中性プラズマ}) \quad (14)$$

$$[\omega - (l-1)\Omega_0]^2 = 0. \quad (\text{銀河}) \quad (15)$$

ここで ω は振動数、 l は角度方向の波数、 ω_c はサイクロトロン周波数である。ここでの diocotron 波は角度方向に伝わる波である。(15) 式で与えられる銀河の上に立つ

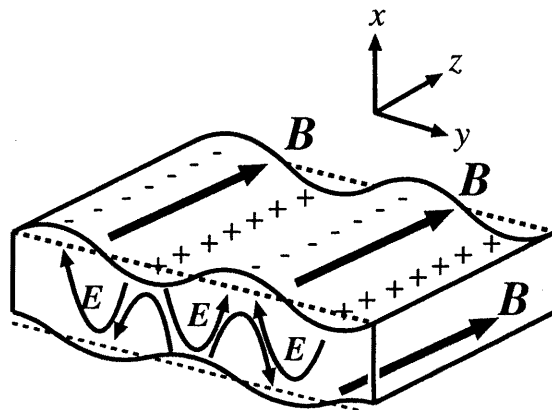


図 1: スラブモデルにおける diocotron 波

線形波動は非中性プラズマにおける diocotron 波に対応するものであり、Lin-Shu 密度波とは異なる。Lin-Shu 密度波は $k_r r \gg 1$ の極限において得られ径方向に伝わるが、ここで述べた diocotron 波は角度方向に伝わる。これは銀河の渦巻構造が高域混成振動と等価な Lin-Shu 密度波としてではなく、非中性プラズマの diocotron 波との相似性から銀河の渦巻構造が説明される可能性を示すものである。

3.3 磁場のシアーによる安定化

磁場にシアーが存在する場合はプラズマ表面に発生した面電荷を磁力線が短絡し、粒子の磁場に沿った運動が発生してこの電荷を打ち消すため、diocotron 不安定性が強く安定化される (図 3)。再びスラブモデルを考え、(1)-(3) 式を代表値を用いて無次元化した後、次のように線形化する。

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0(x) + \Psi_1(x) \exp[i(\omega t - k_y y - k_z z)] \quad (16)$$

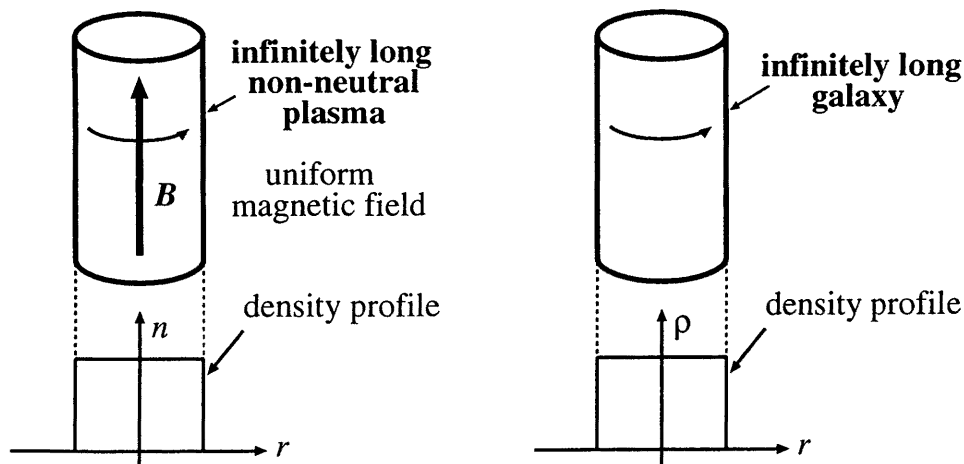
簡単な計算の後、次のような静電ポテンシャルに対する固有方程式が得られる。

$$\left(\frac{d^2 \phi_1}{dx^2} - k^2 \phi_1 \right) + \frac{1}{\omega - k_{\perp} v_{\perp 0}} \frac{d}{dx} \left(\frac{k_{\perp} n_0}{B} \right) \phi_1 + \frac{n_0 k_{\parallel}^2}{s^2 (\omega - k_{\perp} v_{\perp 0})^2} \phi_1 = 0. \quad (17)$$

ここで $s = \omega_p / \omega_c = \omega_D / \omega_p \ll 1$, $\omega_D = \omega_p^2 / \omega_c$ ある。境界条件は $\phi(\pm\infty) = 0$ である。 $\omega - k_{\perp} v_{\perp 0} \neq 0$ ならば (17) 式に ϕ^* (* は複素共役) をかけ、 $(-\infty, \infty)$ で積分すると次が得られる。

$$\omega_i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{|\omega - k_{\perp} v_{\perp 0}|} \frac{d}{dx} \left(\frac{k_{\perp} n_0}{B} \right) + \frac{2n_0 k_{\parallel}^2 (\omega_r - k_{\perp} v_{\perp 0})}{s^2 |\omega - k_{\perp} v_{\perp 0}|^4} \right] |\phi_1|^2 dx = 0 \quad (18)$$

プラズマ内部において $\omega_r - k_{\perp} v_{\perp 0} \neq 0$ ならば、 $s \ll 1$ より被積分関数が符号を変えることはなく、 $\omega_i = 0$ でなければならない。つまり位相速度とプラズマの流速が至る



(a) 非中性プラズマ円柱

(b) 銀河円柱

図 2: Diocotron 波の解析を行う非中性プラズマと銀河のモデル

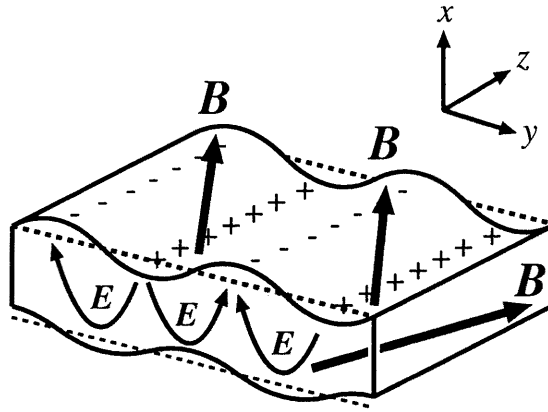


図 3: diocotron 不安定性のシアー磁場による安定化

所で等しくなければ、シアー磁場中の diocotron 不安定性は安定である。 $\omega_r = k_{\perp} v_{\perp 0}$ となる点が存在する場合の安定性は (17) 式を直接解いて ω を評価しなければならない。固有関数 ϕ_1 の一般的な性質として、 $s \ll 1$ のために (17) は振動解を与える。 $\omega \notin \mathcal{R}$ であるとする $\phi_1 \notin \mathcal{R}$ であり、このとき ϕ_1 の実部と虚部の位相が約 $\pi/2$ ずれる。これがプラズマ表面での固有関数の接続条件の成立を阻害するため、 ω が複素数になりにくいという性質がある。これにより磁場のシアーが diocotron 不安定性に対し安定化に効くことが示される。

4 回転系における非線形構造形成

4.1 Lin-Shu 密度波の非線形構造形成

線形解析は重ね合わせの原理が成り立つため、系に固有の構造を決定することができない。構造は非線形性に起因するものであり、これを記述するためには非線形解析

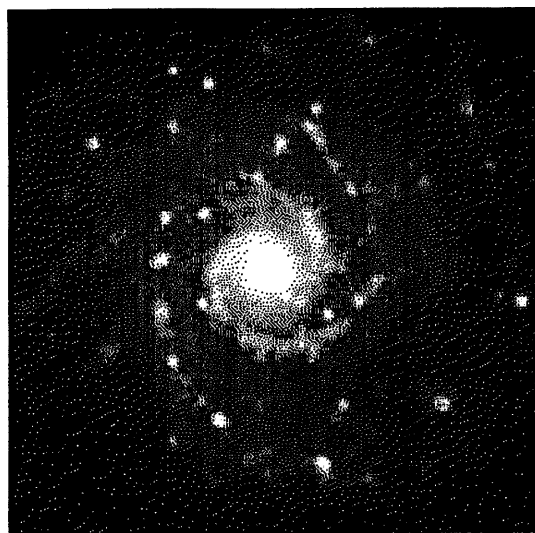


図 4: 渦巻銀河 M74 (岡野邦彦氏による)

(<http://www.asahi-net.or.jp/~rt6k-okn/galaxy/m74labl.jpg>)

が必要である。非線形波動の解析にしばしば用いられる解析手法に逡減摂動法がある。銀河の振舞いを記述する流体方程式系 (4)-(6), (11), (12) に逡減摂動法を導入し、渦巻銀河の密度波に対する非線形構造を調べる。

円筒座標系において (4)-(6) に対し独立変数を次のように変換する。

$$\xi = \varepsilon(r - Vt), \quad \eta = \varepsilon^2\theta, \quad \tau = \varepsilon^2t. \quad (19)$$

ここで ε と V は定数で $\varepsilon \ll 1$ とする。次に従属変数を定常値の周りで次のように展開する。

$$n = n_0 + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \dots \quad (20)$$

$$u = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots \quad (21)$$

$$v = r\Omega + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots \quad (22)$$

ここで n は無限に薄いディスク銀河の面質量密度であり、(4)-(6) および (11) (12) における ρ は n で置き換える。さらに ε の各べきについて次のようにフーリエ展開する。

$$n^{(n)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} n_l^{(n)} \exp \{il(\omega t - m\theta + \lambda f(r))\} \quad (23)$$

$$u^{(n)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l^{(n)} \exp \{il(\omega t - m\theta + \lambda f(r))\} \quad (24)$$

$$v^{(n)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} v_l^{(n)} \exp \{il(\omega t - m\theta + \lambda f(r))\} \quad (25)$$

ここで n_0 は平衡状態での質量密度、 Ω は回転角速度、 ω , m は定数、 $f(r)$ は 1 程度の大きさを持つ実関数、 λ は定数で $\lambda \gg 1$ である。ポテンシャル ϕ は次のように展開する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \simeq -r\Omega^2 + 2\pi G\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=1}^{\infty} \text{Re} \left[2in_l^{(n)} \exp[iil(\omega t - m\theta + \lambda f(r))] \right], \quad (26)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \simeq 0, \quad (27)$$

(19)-(25) 式と (26)、(27) 式を (4)-(6) 式に代入し、複雑な計算の後に最終的に次の式が得られる。

$$i \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \Omega \frac{\partial}{\partial \eta} \right) n_1^{(1)} + d_1 \frac{\partial^2 n_1^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{id_2}{\tau} - d_3 |n_1^{(1)}|^2 n_1^{(1)} = 0, \quad (28)$$

ここで $d_1 \sim d_3$ は平衡状態での各物理量と G , V , ω , m , $\lambda f(r)$ を用いて表される定数 (もしくは τ , ξ , η の変化に対しゆっくり変化する関数) である。(28) 式は $\tau \rightarrow \infty$ の極限で非線形 Schrödinger 方程式に漸近する。非線形 Schrödinger 方程式はプラズマの Langmuir 波や分散性のある誘電体 (光ファイバー) 中を伝播する光などを記述する時に現れ、包絡ソリトンを与える方程式として知られる。2 節で述べた無限に薄いという仮定によって現れた分散性が、流体方程式が本来持つ非線形性と拮抗することにより、ソリトンのような構造が形成される。

4.2 KdV 型のソリトン形成

(4)-(6) 式に対し、円筒座標系で中心からの距離が $r \simeq R$ (R : 定数) 近傍での薄い層状の領域に注目し、銀河の角度方向の振舞いを見る 1 次元近似方程式を求めると次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \rho - v^2, \end{cases} \quad (29)$$

Poisson 方程式の右辺の v^2 の項は回転による遠心力から来る。この方程式系に対し、次のように逐次摂動法を導入する。

$$\rho = 1 + \varepsilon \rho^{(1)} + \varepsilon^2 \rho^{(2)} + \varepsilon^3 \rho^{(3)} + \dots, \quad (30)$$

$$v = 1 + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \varepsilon^3 v^{(3)} + \dots, \quad (31)$$

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \varepsilon^3 \phi^{(3)} + \dots \quad (32)$$

$$\xi = \varepsilon^{1/2} \left(x - \frac{3}{2} t \right), \quad (33)$$

$$\tau = \varepsilon^{3/2} t. \quad (34)$$

これらを (29) に代入すると、最終的に次の KdV 方程式が得られる。

$$\partial_\tau \rho^{(1)} + \frac{3}{4} \rho^{(1)} \partial_\xi \rho^{(1)} - \frac{1}{8} \partial_\xi^3 \rho^{(1)} = 0 \quad (35)$$

KdV 方程式は (伝送波を持たない) ソリトンを記述する方程式として知られる。このことは銀河の腕構造が角度方向に伝播するソリトンとして説明し得ることを意味する。この解析では 4.1 節とは異なり、分散はポアソン方程式から直接もたらされる。この分散が流体の非線形性と拮抗することで局在した構造が現れる。

参考文献

- [1] G. Bertin and C.C. Lin, *Spiral Structure in Galaxies : A Density Wave Theory* (The MIT Press, Massachusetts, 1996).
- [2] C.C. Lin and F.H. Shu, *Astrophys. J.* **140**, 646 (1964).
- [3] R.C. Davidson, *Theory of Nonneutral Plasmas* (Addison-Wesley, Massachusetts, 1989)
- [4] W. Knauer, *J. Appl. Phys.* **37**, 602 (1966).