論文の内容の要旨

論文題目： **Splitting of Singular Fibers in Certain Holomorphic Fibrations**
（ある正則ファイバー空間内にある、特異ファイバーの分裂について）

氏名： 伊東　利雄

リーマン面の退化族に現れる複雑な形をした特異ファイバーを、いくつかのより単純な特異ファイバーに分裂させる問題が興味をもたれている。とくにこれ以上分裂しない、いわゆる「原子ファイバー」の形状の決定は重要である。

例えば種数が2の場合、[Ho1] および [AA] により既に「原子ファイバー」が決定されていて、種数2の「原子ファイバー」は2種類しかない事が分かっている。また種数が2より大きい場合、[AA] により退化超楕円曲線に対する「原子ファイバー」の形状が徐々に決定されつつある。

「原子ファイバー」の形状の決定は重要な問題であるが、特異ファイバーの分裂に伴ってその特異ファイバーの周りの位相的モノドロミーがどのように分解するのか、という事も興味深い問題である。

そこで筆者はある具体的な種数 g の特異ファイバーを取り上げ、この特異ファイバーがどのような原始ファイバーに分裂するのか、また位相的モノドロミーがどのように分解するのかについて研究した。

1. 本論文の内容

題目 Splitting of Singular Fibers in Certain Holomorphic Fibrations
（ある正則ファイバー空間内にある、特異ファイバーの分裂について）

Σ_g を種数 g の閉曲面とし $\omega_g : \Sigma_g \to \Sigma_g$ を図 1 の様な hyperelliptic involution とする。

また $\tau : S^2 \to S^2$ を S^2 の南極と北極を通る軸の周りの 180 度回転とする。この時商空間 $\Sigma_g \times S^2/\omega_g \times \tau$ は $2(2g+2)$ 個の特異点を持つ。そこでこれらの特異点をブロウアップすることにより複素曲面 M_g を得る。この複素曲面 M_g は $\mathbb{CP}^2\#(4g+5)\overline{\mathbb{CP}^2}$ に微分同相となる。

そして $\Sigma_g \times S^2$ の第 2 成分への射影 $\Sigma_g \times S^2 \to S^2$ から自然に射影 $f_g : M_g \to S^2/\tau \cong S^2$ が誘導される。この射影 f_g より複素曲面 M_g には S^2 を底空間とする種数 g の holomorphic fibration の構造が入る。

この holomorphic fibration $f_g : M_g \to S^2$ は τ の 2 つの固定点に対応して 2 本の特異ファイバーがあり、それらの位相形は共に同じになる。また各特異ファイバーの周りの位相的モノドロミーは hyperelliptic involution ω_g によって与えられる。それ故これら 2 本の特異ファイバーを同じ記号 F_{ω_g} によって表わす事にする。ここで F_{ω_g} の形を図 2 に表わす。図 2 内の各線分は S^2 を表し添字は重複度を表す。

筆者はこの特異ファイバー F_{ω_g} がどのような Lefschetz 型の特異ファイバーに分裂するのか、またその分裂に伴って F_{ω_g} の位相的モノドロミー ω_g がどのように分解するのかについて調べた。

特異ファイバー F_{ω_g} の分裂を調べる為に、まず始めに特異ファイバー F_{ω_g} を含む種数 g のリーマン面の退化族を具体的に構成する。すなわち次のものを具体的に構成する。

N を noncompact complex surface とし D を $\mathbb{C}$ 内の原点を中心に持つ open disk とする。また $\varphi : N \to D$ は次の条件を満たす proper surjective holomorphic map とする。

1. $\varphi|_{\varphi^{-1}(D\setminus\{0\})} : \varphi^{-1}(D \setminus \{0\}) \to D \setminus \{0\}$ はファイバー Σ_g を持つファイバーバンドル,
2. $\varphi^{-1}(0) = F_{\omega_g}$.

そして本論文における主な結果は次のとおりである。

主定理:

あるパラメータによって φ を perturb し N の複素構造を変形させると、特異ファイバー F_{ω_g} は $2g$ 本の I 型の Lefschetz 特異ファイバーと Lefschetz 型ではない特異ファイバー F' へと分裂する。さらに特異ファイバー F' は F' の小さな近傍内で $2g+2$ 本の I 型の Lefschetz 特異ファイバーへと分裂する。

それ故、特異ファイバー F_{ω_g} は $2(2g+1)$ 本の I 型の Lefschetz 特異ファイバーへと分裂する。

$b_1, b_2, \cdots, b_{2(2g+1)}$ を 2 回の分裂によって得られた D 内の新しい critical value 達とする。そして基準点として D 内の 0 に近い正の実数 b_0 を 1 つ固定し、図 3 に示されたループ達をとる。

この時、図 4 に示された elementary transformation を何回か行って図 3 に示されたループ達を変形させてやると、モノドロミー表現 $\rho : \pi_1(D \setminus \{b_1, \cdots, b_{2(2g+1)}\}, b_0) \to \mathcal{M}_g$ は次の $2(2g+1)$-tuple によって表わされる。

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_{2g}, \zeta_{2g+1}, \zeta_{2g+1}, \zeta_{2g}, \cdots, \zeta_3, \zeta_2, \zeta_1).$$

ここで $\mathcal{M}_g$ は種数 g の写像類群を表し、ζ_i は図 5 に示された単純閉曲線 C_i に沿った (-1) 回の Dehn Twist を表す。

それ故 F_{ω_g} のモノドロミー ω_g は

$$\omega_g = \zeta_1\zeta_2\zeta_3\cdots\zeta_{2g}\zeta_{2g+1}^2\zeta_{2g}\cdots\zeta_3\zeta_2\zeta_1$$

のように分解する。

以上が主定理のステートメントである。

上の主定理は [Ma2] の Fact 1 で述べられている特異ファイバー F_{ω_2} の分裂に関する結果の一般化である。筆者は研究の初期の段階で、種数 g が小さい時の特異ファイバー F_{ω_g} の分裂について調べた。その際、分裂によって得られた新しい特異ファイバー達に関する消滅サイクルを調べる為に *Mathematica* を使った。しかし本論文の証明の中で *Mathematica* を使う所はない。研究の初期の段階において何処で *Mathematica* を使ったのかは本論文の Remark 8.2 を参照していただきたい。

さて holomorohic fibration $f_g : M_g \to S^2$ に話を戻す。M_g は $\mathbb{CP}^2\#(4g+5)\overline{\mathbb{CP}^2}$ に微分同相であり、holomorohic fibration $f_g : M_g \to S^2$ は 2 本の特異ファイバー F_{ω_g} を持っていた。そこでこれら 2 本の特異ファイバーをそれぞれ分裂させることにより次の系を得る。

系:

2 本の特異ファイバー F_{ω_g} の分裂により $4(2g+1)$ 本の I 型の特異ファイバーを持つ種数 g の Lefschetz fibration

$$\mathbb{CP}^2\#(4g+5)\overline{\mathbb{CP}^2} \to S^2$$

が得られる。

また対応するモノドロミー表現は $4(2g+1)$-tuple

$$(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{2g}, \zeta_{2g+1}, \zeta_{2g+1}, \zeta_{2g}, \cdots, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{2g}, \zeta_{2g+1}, \zeta_{2g+1}, \zeta_{2g}, \cdots, \zeta_2, \zeta_1)$$

で与えられる。それ故全体のモノドロミーは

$$(\zeta_1\zeta_2\zeta_3\cdots\zeta_{2g}\zeta_{2g+1}^2\zeta_{2g}\cdots\zeta_3\zeta_2\zeta_1)^2 = 1$$

となる。この関係式は種数 g の写像類群 $\mathcal{M}_g$ のよく知られた関係式になる。

謝辞

本論文作成に際して、指導教官の松本幸夫先生から多大な助言、御指導をいただきました。心より深く感謝すると共にお礼申し上げます。

References

[AA] T. Arakawa and T. Ashikaga, *Local splitting families of hyperelliptic pencils, I*, preprint.

[B] J. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. USA., (1974).

[Ho1] E. Horikawa, *Local deformation of pencils of curves of genus two*, Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci., **64** (1988), 241–244.

[Ma1] Y. Matsumoto, *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*, Topology **25** (1986), 549–563.

[Ma2] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two – a topological approach –*, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces, ed. Sadayoshi Kojima et al., World Scientific Publishing Co. (1996), 123–148.

[Ma3] Y. Matsumoto, *Topology of torus fibrations*, Sugaku **36** (1984), 289–301 (in Japanese).

[Ma4] Y. Matsumoto, *Torus fibrations over the 2-sphere with the simplest singular fibers*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 603–633.

[Ma5] Y. Matsumoto, *Splitting of certain singular fibers of genus 2*, preprint.

[MM1] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic homeomorphisms and degeneration of Riemann surfaces*, Bull. AMS. **30** (1994), 70–75.

[MM2] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces. I, II*, preprint, University of Tokyo and Universidad Complutense de Madrid (1991/1992).

[Mo] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lecture Note in Math. **603**, Splinger Verlag (1977).

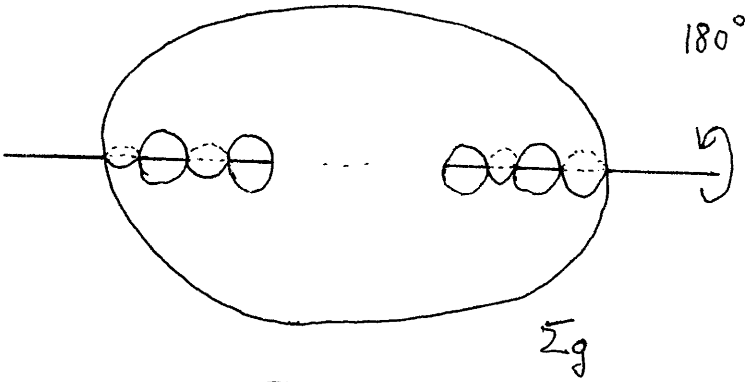

図 1

2g+2 コ の S^2

図 2

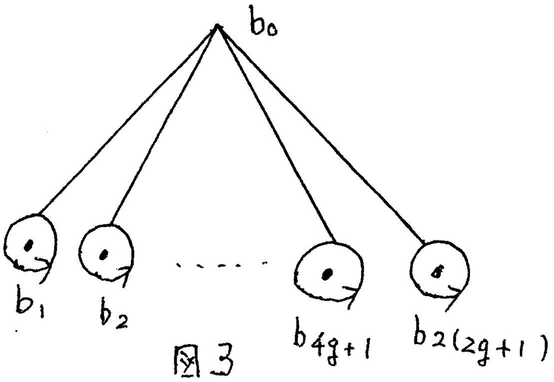

図3

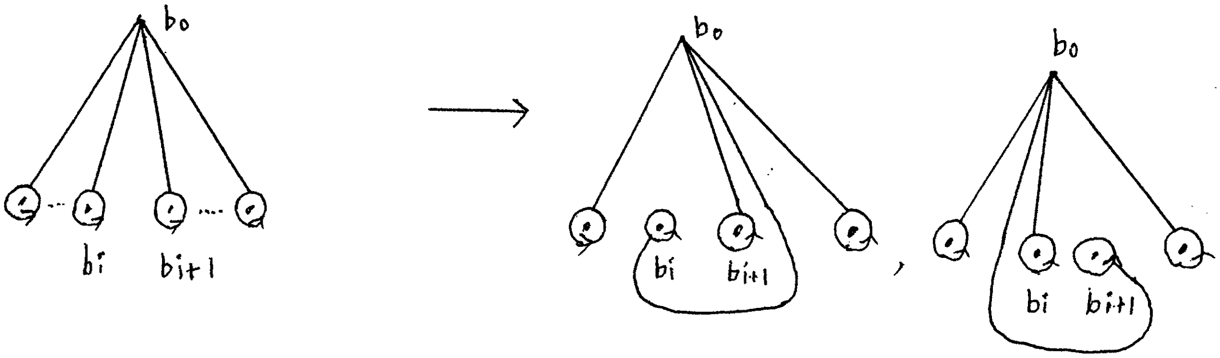

図 4

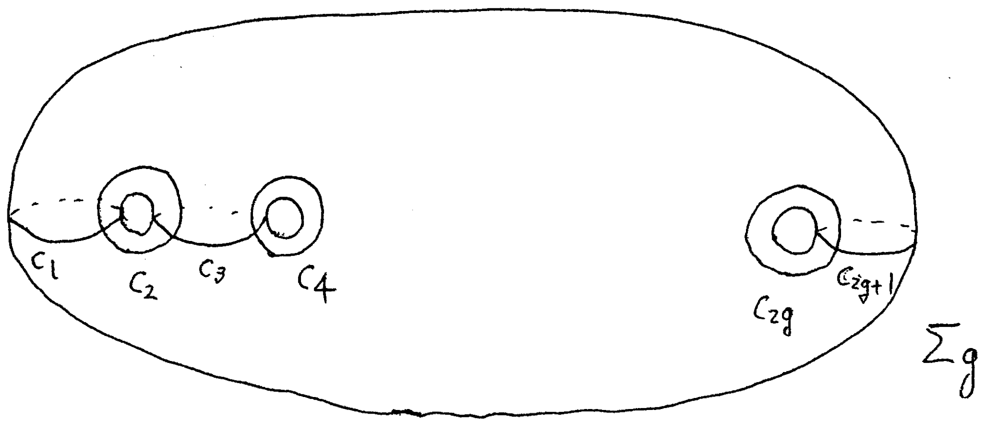

図 5