

論文審査の結果の要旨

氏名 伊東 利雄

複素数円板 Δ 上に与えられた閉リーマン面の退化族を変形 (perturb) して、そこに含まれる特異ファイバーを、いくつかのより簡単な特異ファイバーに分裂させる問題は、代数幾何、位相幾何双方の観点から興味ある問題である。このような問題は、ファイバーの種数が 1 の場合に Moishezon(1977) により研究され、種数 2 の場合は堀川(1988)、一般の種数かつ超楕円的の場合に荒川-足利(1998) により研究された。G.Xiao と M.Reid は、このような変形によってそれ以上分裂させることが不可能であるような特異ファイバー (原子ファイバー) を分類することを問題として提起している。特別な場合として、リーマン面上の単純閉曲線を 1 点につぶして得られる Lefschetz 型特異ファイバーは原子ファイバーの一種である。

一方、特異ファイバーの跡の周りを 1 周する底空間のループに沿って、正則ファイバーを動かすと、正則ファイバーからそれ自身への向きを保つ同相写像のイソトピー類が得られる。これを特異ファイバーの周りの位相的モノドロミーと呼ぶ。特異ファイバーの位相形と位相的モノドロミーの共役類とは全単射的に対応する (松本-Montesinos)。例えば、Lefschetz 型の特異ファイバーに対応する位相的モノドロミーはその消滅サイクルの周りの負型 Dehn ツイストである。特異ファイバーの分裂に伴い、その周りの位相的モノドロミーが写像類群の中でどのように分解するか、という問題は位相幾何学の観点からも重要である。

提出された論文は、種数 g の閉リーマン面 Σ_g の超楕円的対合 $\omega_g : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ を位相的モノドロミーとするような特別の形の特異ファイバー F_{ω_g} の分裂を扱っている。主定理は次のように述べることができる。

定理. F_{ω_g} は、途中で C^∞ の操作を含む変形により、非分離的単純閉曲線を消滅サイクルとする $2(2g+1)$ 本の Lefschetz 型特異ファイバーに分裂させることができる。基準となる正則ファイバーの跡と新しく生まれた $2(2g+1)$ 本の Lefschetz 型ファイバーの跡を結ぶ底空間のアークをうまくとると、消滅サイクルはリーマン面上標準的なサイクル $C_1, C_2, \dots, C_{2g+1}$ (下図) に持ち来すことができ、対応する負型 Dehn ツイストを $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2g+1}$ とすると、全体のモノドロミーは

$$\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2g+1} \zeta_{2g+1} \cdots \zeta_2 \zeta_1$$

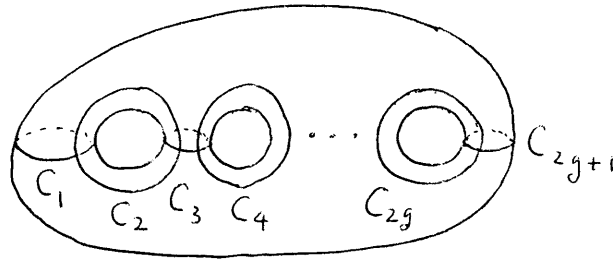


図 1: 標準的サイクル $C_1, C_2, \dots, C_{2g+1}$

により与えられる.

写像類群 M_g のなかで, 超楕円の対合 ω_g が

$$\omega_g = \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_{2g+1}^2 \dots \zeta_2 \zeta_1$$

と書けることは良く知られており, 上の定理の分解はこのような代数的表示を特異ファイバーの分裂として幾何学的に実現したものと考えられる. 主定理の証明は次のようになされる. まず, ある具体的な有理関数 h をつかって, 特異ファイバー F_{ω_g} を中心ファイバーとする Δ 上の種数 g のリーマン面の退化族 $\phi: N \rightarrow \Delta$ を構成する. その全空間 N と射影 ϕ を変形のパラメータ ϵ により変形し, 新しく得られた退化族 $\phi_\epsilon: N_\epsilon \rightarrow \Delta$ のなかに生じた複数個の特異ファイバーの周りの位相的モノドロミーを詳しく観察する. その際, はじめにとった有理関数 h が $\mathbb{C}P^1$ から $\mathbb{C}P^1$ への $(g+1)$ 重の分岐被覆になっており, その $2g$ 個の分岐点では 2 重の分岐が起きているという幾何的事実が本質的である. 論文提出者ははじめ, コンピュータを用いて分岐点の動きを観察し, 小さな g について現象論的に上の主定理を得ていたが, この幾何的事実に気づくことによって全ての g について主定理を証明することに成功したのである.

この論文の結果は, 特殊な型の特異ファイバーに関する結果とはいえ, 全ての種数 g について, 特異ファイバーの分裂の様子を位相的モノドロミーまで込めて完全に記述した初めての成果であり, 特異ファイバーの分裂に関する研究に多大の示唆を与えるものである.

よって, 論文提出者 伊東利雄 は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める.