論文の内容の要旨

論文題目

“On the μ-invariants in Iwasawa theory of elliptic curves”

(楕円曲線の岩澤理論における μ 不変量について)

氏名　　八森 祥隆

E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とする. p を素数とし, $\mathbb{Q}_\infty$ を $\mathbb{Q}$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする. E の $\mathbb{Q}_\infty$ 上の (p^∞-)Selmer 群 を $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ とかく. この群は次の完全列を満たす.

$$0 \to E(\mathbb{Q}_\infty) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty) \to III(E/\mathbb{Q}_\infty)[p^\infty] \to 0.$$

ここで $E(\mathbb{Q}_\infty)$ は $\mathbb{Q}_\infty$ 上の Mordell-Weil 群であり, $III(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は Tate-Shafarevich 群である. $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ には $\Gamma := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ が自然に作用するが, この作用により, Pontryagin dual

$$\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

に対し, $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[T]]$ の作用を定めることができる. この作用で $\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は 有限生成 Λ-module となる. このように $\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ を Λ-module として研究する事は, イデアル類群を研究する classical な岩澤理論 (cf. [Iw]) の類似として, Mazur により始められた (cf. [Maz]).

更に E が p で good ordinary reduction をもつとする. Rubin と Kato により次の深い結果が知られている.

定理 (Rubin, Kato). E が p で good ordinary reduction を持つとする. このとき, Λ-module $\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は Λ-torsion となる.

一般に, 有限生成 Λ-torsion Λ-module M に対し, μ-不変量 $\mu(M) \in \mathbb{Z}$ が定義される. この不変量の重要性は次の事実による: $\mu(M) = 0$ のときに限り M は $\mathbb{Z}_p$-module として有限生成になる.

さて, $\mu(\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty))$ について, Greenberg が次を示している.

定理 (Greenberg[Gr]). p を奇素数とする. $E[p]$ は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module として可約とする. 即ち, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-submodule $\Phi \subset E[p]$ でアーベル群として $\Phi \cong \mathbb{Z}/p$ であるものが存在するとする. φ を Φ に対応する Dirichlet 指標とする. このとき

(i) Φ が "odd ($\varphi(-1)=-1$) かつ p で unramified ($\varphi(p)\neq 0$)" または "even ($\varphi(-1)=1$) かつ p で ramified ($\varphi(p)=0$)" であれば, $\mu(\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty))=0$ である.

(ii) Φ が odd ($\varphi(-1)=-1$) かつ p で ramified ($\varphi(p)=0$) であれば, $\mu(\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty))>0$ である.

上の定理で議論されていない残された場合は, 次の 2 つの場合である.

(A) $E[p]$ は可約, 即ち $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-submodule $\Phi\subset E[p]$ で $\Phi\cong\mathbb{Z}/p$ で, 次を満たすものが存在する. even ($\varphi(-1)=1$) かつ p で unramified ($\varphi(p)\neq 0$) であり, 更に

$$0\to\Phi\to E[p]\to E[p]/\Phi\to 0$$

は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module として split しない.

(B) $E[p]$ は既約である.

Greenberg は次を予想している.

予想 ([Gr]). *E の p-等分点の群 $E[p]$ が上の (A) か (B) を満たせば $\mu(\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty))=0$ であろう.*

この予想は $E[p]$ が $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module として既約のとき ((B) の場合) は難しい. しかし $E[p]$ が可約 ((A) の場合) のときは以下に見るように手掛かりがある.

本論文では, 次の特別な場合について結果を得た. $E/\mathbb{Q}$ を $p=3$ で good ordinary reduction を持つような楕円曲線とする. 更に次の条件を考える.

(C): $E(\mathbb{Q})$ は 3 等分点をもつ. すなわちアーベル群として $\Phi=E(\mathbb{Q})[3]\cong\mathbb{Z}/3$ である. 更に次の完全列

$$0\to\Phi\to E[3]\to E[3]/\Phi\to 0$$

は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-modules として split しない.

注. (C) は (A) の特別な場合である. また, このような楕円曲線は存在する.

主定理を述べるために今少し準備が必要である. $p=3$ とする. L を 3-分点を全て付け加えた体 $\mathbb{Q}(E[3])$ とする. 条件 (C) により $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong\mathfrak{S}_3$ であり, ある $a\in\mathbb{Z}$ により $L=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{a},\zeta_3)$ である. $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{a})$ とする. 再び条件より K には p 上の素点が 2 つあり, それらを $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2$ とおく. $K_{\mathfrak{p}_1}=\mathbb{Q}_p$, $[K_{\mathfrak{p}_2}:\mathbb{Q}_p]=2$ としてよい. K_∞ を K の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする. $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2$ らは K_∞/K で完全分岐する. そこで K_∞ の $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2$ 上の素点を再び $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2$ と書く.

$T_\infty=\{\mathfrak{p}_2\}$ とおく. $\mathcal{M}_{T_\infty}(K_\infty)$ を K_∞ 上の T_∞ の外で不分岐となる最大のアーベル p-拡大とする.

$$\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty):=\mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{T_\infty}(K_\infty)/K_\infty).$$

とおく．$\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ には $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ が作用し，これにより Λ-module となる．更に Λ 上有限生成である．

本論文の主結果は次の通りである．

主定理． $p=3$ とする．E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とし，$p=3$ で good ordinary reduction を持つものとする．更に E は条件 (C) を満たすとする．K, T_∞, $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ を上の通りとする．

(i) $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ は Λ-torsion である．

(ii) $\mu(\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty))=0$ であるための十分条件がある．

(iii) $\mu(\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty))=0$ でありかつそのときに限り $\mu(\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty))=0$.

始めに述べた Greenberg の結果は，$\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ の μ-不変量の消滅を，あるアーベル体 k 上の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大体上の不分岐最大アーベル p-拡大のガロア群 $A(k_\infty)$ の μ-不変量の消滅に帰着することにより証明される．$A(k_\infty)$ は classical な岩澤理論で扱われる Λ-torsion module であり，$\mu(A(k_\infty))=0$ は Ferrero-Washington により示されている．

一方 (C) では，$\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ をアーベルな k の $A(k_\infty)$ などの classical な岩澤理論で扱われる対象と関連づけることは出来ないが，我々はある非ガロアな体 K の 円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大体上のガロア群 $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ と関連付けることが出来た．更に $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ の性質を調べたのが主定理である．

以下論文の構成について述べ，主結果について少し詳しく述べる．(定理 A, 命題 B, 定理 C).

Chapter 2 では classical な岩澤理論における基本的事実を復習する．

Chapter 3 に於ける結果は主定理 (iii) (定理 C) の証明に必要である．ここでは $K/\mathbb{Q}$ が Galois のとき，$\mathfrak{X}(K_\infty)/p$ の $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$-module としての構造を考える．但し，$\mathfrak{X}(K_\infty)$ は K_∞ 上 p の外不分岐アーベル p-拡大のガロア群であり，classical な岩澤理論における主要な対象の 1 つである．我々は Question 3.10 について考え，特別な場合の答えとして Proposition 3.9 と Proposition 3.13 を得た．

Chapter 4 では $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ について考える．我々はより一般の状況を考える．p を一般の素数とし，$P(K)$ を一般の代数体 K の p 上の素点全体の集合とする．$T\subset P(K)$ を任意の部分集合とする．$\mathcal{M}_T(K)$ を K の T の外不分岐最大アーベル p-拡大とする．

$$\mathcal{Y}_T(K) := \mathrm{Gal}(\mathcal{M}_T(K)/K).$$

とおく．K の 円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 K_∞ に対し，$T_\infty\subset P(K_\infty)$ を T 上の素点全体とする．$\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ は Λ-module. このような p 上の素点が 1 部分岐するようなガロア群はこれまで classical な岩澤理論では $T_\infty=\varnothing$ (不分岐拡大) か $T_\infty=P(K_\infty)$ (p の外不分岐拡大)，あるいは CM-楕円曲線で現れる特別な場合以外には考えられて来なかった．

Chapter 4 の §1 から §5 において $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ の一般論を展開する．まず基本的事実 (Proposition 4.1, Proposition 4.7 など) を与えた後，Λ-rank と μ-不変量 についての問題 (Question 4.10) について考える．我々はこれについて $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ の Λ-rank の上限を

与える結果を得た (Theorem 4.20). これは本質的には Ax と Brumer の Leopoldt 予想に関する結果に於いて用いられた方法の応用である (cf. [Br]).

然る後, Chapter 4 §6 から §8 に於いて, 主定理に現れる特別な場合, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{a})$ について考え, 次を得た.

定理 A. (Theorem 4.24.) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{a})$ とする. p を奇素数で K で $(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $K_{\mathfrak{p}_1} = \mathbb{Q}_p$, $[K_{\mathfrak{p}_2} : \mathbb{Q}_p] = 2$ と分解するものとする. (主定理は $p = 3$ の場合である.) $T_\infty = \{\mathfrak{p}_2\}$ とする. このとき $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ は Λ-torsion.

μ-不変量 については次を得た. $\mathcal{E}_{n,\mathfrak{p}_1}$ を n-th layer K_n の global な $\mathfrak{p}_1$-単数の群とする. $\mathcal{U}_{n,\mathfrak{p}_2}$ を $K_{n.\mathfrak{p}_2}$ の局所主単数群とする. $\mathrm{Cl}_{\{\mathfrak{p}_1\},n}[p^\infty]$ を K_n の $\mathfrak{p}_1$-イデアル類群の p-part とする.

命題 B. (Proposition 4.28.) K と p は定理 A のとおりとする.

$$e_n := \mathrm{ord}_p(\mathcal{U}_{n,\mathfrak{p}_2}/\overline{\mathcal{U}_{n,\mathfrak{p}_2} \cap \mathcal{E}_{n,\mathfrak{p}_1}}) + \mathrm{ord}_p(\mathrm{Cl}_{\{\mathfrak{p}_1\},n}[p^\infty])$$

とおく. もし ある $n \geq 0$ が存在して $e_{n+1} < \infty$ であり (このとき , $e_n < \infty$), 更に $e_{n+1} - e_n < \varphi(p^{n+1})$ であれば, $\mu(\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)) = 0$ である. ここで φ は Euler φ-function とする.

$\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ について他の応用も得た. 我々は特別な K と p について classical な岩澤不変量 $\lambda(K)$, $\mu(K)$ と $\nu(K)$ が全て 0 になるための必要十分条件を与えた (Chapter 4 §4 Proposition 4.12). これは Fukuda-Komatsu の criterion の一般化である.

Chapter 5 では楕円曲線の岩澤理論について復習し, 上の Greenberg の定理を復習する. Chapter 6 で次を示す.

定理 C. (Theorem 6.4 + Proposition 6.3.) $p = 3$ とする. $E/\mathbb{Q}$ を主定理のように 条件 (C) を満たす楕円曲線とする. このとき Selmer 群の Pontryagin dual $\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ が Λ-torsion かつ $\mu = 0$ であるのは $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ が Λ-torsion かつ $\mu = 0$ のときでありかつそのときにかぎる. ここで K_∞, T_∞, $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ は上の通り.

参考文献

[Br] Brumer, A.: *"On the units of algebraic number fields"*, Mathematika,**14**(1967), 121–124.

[Gr] Greenberg, R.: *"Iwasawa theory for elliptic curves"*, L. N. M., **1716** Springer, (1999), 51–144.

[Iw] Iwasawa, K.: *"On $\mathbb{Z}_l$-extension of algebraic number fields"*, Annals of Math. **98** (1973), 246–326.

[Maz] Mazur, B.: *"Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields"*, Invent. Math. **18** (1972), 183–266.