論文審査の結果の要旨

氏　名　　八森 祥隆

論文題目

"On the μ-invariants in Iwasawa theory of elliptic curves"
(楕円曲線の岩澤理論における μ 不変量について)

この論文は有理数体上の楕円曲線の Selmer 群から生じる岩澤加群の μ-不変量を調べている. 具体的には Greenberg のある予想を扱い、予想の解決には到らないものの、次ぎのような成果を得ている.
(1) $p=3$ のとき問題を代数体の岩澤理論から生ずる岩澤加群の問題に帰着させた.
(2) この (1) の問題に登場する $\mathbb{Q}$ 上ガロア拡大でない体に関して $\mu=0$ となる十分条件を与えた.
(3) 問題 (1) に登場する新しい型の岩澤加群について一般的な結果を得た.

素数 p に対し, $\mathbb{Q}_\infty$ を $\mathbb{Q}$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする. $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E の $\mathbb{Q}_\infty$ 上の (p^∞-)Selmer 群 を $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ と書くと, この群は次の完全列を満たす.

$$0 \to E(\mathbb{Q}_\infty)\otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty) \to III(E/\mathbb{Q}_\infty)[p^\infty] \to 0.$$

ここで $E(\mathbb{Q}_\infty)$ は $\mathbb{Q}_\infty$ 上の Mordell-Weil 群であり, $III(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は Tate-Shafarevich 群である. $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ には $\Gamma := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ が自然に作用するが, この作用により, Pontryagin 双対 $\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ に対し, $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[T]]$ の作用を定めることができる. この作用で $\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は 有限生成 Λ-module となる. このように $\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ を Λ-module として研究する事は, イデアル類群を研究する通常の岩澤理論の類似として, Mazur により始められた. 更に E が p で good ordinary reduction をもつとする. Rubin と Kato は独立に, このとき, Λ-module $\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は Λ-torsion となる, ことを示した.

一般に, 有限生成 Λ-torsion Λ-module M に対し, μ-不変量 $\mu(M)\in\mathbb{Z}$ が定義される. この不変量 $\mu(M)=0$ のときに限り M は $\mathbb{Z}_p$-module として有限生成になる.

さて $\mu(\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty))$ については Greenberg が次を示している.

定理 (Greenberg). p を奇素数とする. $E[p]$ は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module として可約とする. 即ち, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-submodule $\Phi\subset E[p]$ でアーベル群として $\Phi\cong\mathbb{Z}/p$ であるものが存在するとする. φ を Φ に対応する Dirichlet 指標とする. このとき

(i) Φ が "odd ($\varphi(-1)=-1$) かつ p で unramified ($\varphi(p)\neq 0$)" または "even ($\varphi(-1)=1$) かつ p で ramified ($\varphi(p)=0$)" であれば, $\mu(\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty))=0$ である.
(ii) Φ が odd かつ p で ramified であれば, $\mu(\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty))>0$ である.

上の定理で議論されていない残された場合は, 次の２つの場合である.

(A) $E[p]$ は可約, 即ち $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-submodule $\Phi \subset E[p]$ で $\Phi \cong \mathbb{Z}/p$ で, 次を満たすものが存在する. even ($\varphi(-1)=1$) かつ p で unramified ($\varphi(p)\neq 0$) であり, 更に

$$0 \to \Phi \to E[p] \to E[p]/\Phi \to 0$$

は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module として split しない.

(B) $E[p]$ は既約である.

さて所謂 Greenberg 予想とは、「E の p-等分点の群 $E[p]$ が上の (A) か (B) を満たせば $\mu(\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty))=0$ であろう」という主張である. この予想は $E[p]$ が $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module として既約のとき ((B) の場合) は難しい. しかし $E[p]$ が可約 ((A) の場合) のときは以下に見るように手掛かりがあると思われ, それがこの論文の主題である.

本論文では, 次の特別な場合について結果を得た. $E/\mathbb{Q}$ を $p=3$ で good ordinary reduction を持つような楕円曲線であり, 更に次ぎの条件をみたす.

(C): $E(\mathbb{Q})$ は 3 等分点をもつ：すなわちアーベル群として $\Phi = E(\mathbb{Q})[3] \cong \mathbb{Z}/3$ であり, 更に「完全列：$0 \to \Phi \to E[3] \to E[3]/\Phi \to 0$」は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-加群として分裂しない.

主定理を述べるために今少し準備が必要である. $p=3$ とする. 条件 (C) により 3-分点を全て付け加えた体 $L=\mathbb{Q}(E[3])$ に対し, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathfrak{S}_3$ であり, ある $a \in \mathbb{Z}$ により $L=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{a}, \zeta_3)$ である. $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{a})$ とする. 再び条件より K には p 上の素点が $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ と 2 つあり, $K_{\mathfrak{p}_1}=\mathbb{Q}_p$, $[K_{\mathfrak{p}_2}:\mathbb{Q}_p]=2$ としてよい. K_∞ を K の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ らは K_∞/K で完全分岐する. そこで K_∞ の $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ 上の素点を再び $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ と書く.

$T_\infty=\{\mathfrak{p}_2\}$ とおく. $\mathcal{M}_{T_\infty}(K_\infty)$ を K_∞ 上の T_∞ の外で不分岐となる最大のアーベル p-拡大とすし, $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty) := \mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{T_\infty}(K_\infty)/K_\infty)$ とおく. $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ には $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ が作用し, これにより Λ-module となり, 更に Λ 上有限生成である.

これらの記号の下で、本論文の主結果は次の通りである.

主定理. $p=3$ とする. E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とし, $p=3$ で good ordinary reduction を持ち, 条件 (C) を満たすとする. このとき次ぎが成立する.

(i) $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ は Λ-torsion である.
(ii) $\mu(\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty))=0$ であるための十分条件がある.
(iii) $\mu(\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty))=0$ でありかつそのときに限り $\mu(\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty))=0$.

Greenberg の最初の結果は, $\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ の μ-不変量の消滅を, あるアーベル体 k 上の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大体上の不分岐最大アーベル p-拡大のガロア群 $A(k_\infty)$ の μ-不変量の消滅に帰着することにより証明される. この古典的な岩澤理論で扱われる加群に対して, $\mu(A(k_\infty))=0$ は Ferrero-Washington により示されている.

一方 (C) では, $\mathcal{X}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ をアーベルな k の $A(k_\infty)$ などの古典的岩澤理論で扱われる対象と関連づけることは出来ないが, 当論文ではある非ガロアな体 K の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大体上のガロア群 $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ と関連付け, 更に $\mathcal{Y}_{T_\infty}(K_\infty)$ の性質を調べたのが主定理である.

本論文は楕円曲線の岩澤理論と関連つけて、有理数体上の非ガロア拡大の岩澤理論に取り組む新たな野心的試みであり、証明などに関しても興味深い点が多々ある。今後当該分野の研究の進展に寄与する点が少なくない。よって、論文提出者 八森祥隆 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。