論文の内容の要旨

論文題目

Algebraic cycles and infinitesimal invariants on Jacobian varieties
（ヤコビ多様体上の代数的サイクルと無限小不変量）

氏名

池田 京司

C を複素数体上の種数 g の非特異射影的代数曲線, J を C のヤコビ多様体とする. C の閉点 p を与えると, C の l 次対称積 $\mathrm{Sym}^l C$ から J への写像が

$$p_1 \cdot \cdots \cdot p_l \mapsto [p_1 + \cdots + p_l - lp]$$

により定まる. $l \leq g$ のとき, この写像の像 W_l は余次元 $g-l$ の J の既約部分多様体である. J 上の代数的サイクル $W_l - (-1)^* W_l$ のホモロジー類はゼロであるが, アーベル-ヤコビ写像による J の中間ヤコビアンへの像を調べることによって, Ceresa は一般の代数曲線において $l \leq g-2$ のとき W_l と $(-1)^* W_l$ が代数的に同値でないことを証明した [C].

アーベル多様体の有理チャウ群に関する Beauville の結果 [B] により, J のアーベル多様体としての整数 k 倍写像によって, W_l は $CH^{g-l}(J) \otimes \mathbb{Q}$ の中で

$$W_l = \sum_{\nu} W_l^{\nu} \qquad (\mathbf{k}^* W_l^{\nu} = k^{2g-2l-\nu} W_l^{\nu})$$

と分解される. $\nu \neq 0$ のとき W_l^{ν} のホモロジー類はゼロで, さらに $\nu \neq 1$ のとき W_l^{ν} のアーベル-ヤコビ写像の像はゼロなので, Ceresa の結果は W_l^1 が代数的にゼロと同値でないと解釈することができる. 本論文では W_l^{ν} が $\nu \geq 2$ のときに, 以下で述べる意味で代数的にゼロと同値かどうかという問題を扱う. $\nu = 1$ の場合と異なり代数的サイクルをアー

ベル-ヤコビ写像を使って幾何学的対象でとらえることができないところが難しいところである.

Griffiths は代数多様体の族において, ホモロジー類がゼロであるような代数的サイクルの族に対し, そのアーベル-ヤコビ写像による像を中間ヤコビアンの族の正則切断としてとらえ, その変動を表す量として無限小不変量を定義した [G]. 非特異射影的代数多様体 X に対し, Saito はホモロジー類がゼロのサイクルのなす部分群が $F^1CH^r(X)$ と一致するような降下フィルター F を $CH^r(X)$ に定義し, $F^\nu CH^r(X)$ に含まれるサイクルの族をとらえる量として Griffiths の無限小不変量を一般化した [AS]. この F は, 混合モチーフの理論が存在するという予想のもとチャウ群にフィルトレーション $F_{\mathcal{M}}$ が定まるという Bloch と Beilinson の考察に基づいて定義されている. 彼はまた $F^\nu CH^r(X)$ の部分群を

$$Z_0F^\nu CH^r(X) = \sum_{Y,\Gamma} \mathrm{Im}(\Gamma_* : F^\nu CH_0(Y) \to CH^r(X))$$

(Y は非特異射影的代数多様体, Γ は $CH^r(Y \times X)$ の元)

と定義し, これを代数的同値という概念の自然な一般化と考え, 高次グリフィス群を

$$Grif^{r,\nu}(X) = F^\nu CH^r(X)/(F^{\nu+1}CH^r(X) + Z_0F^\nu CH^r(X))$$

と定義した.

先に述べた Beauville の分解を混合モチーフを使って解釈すれば, W_l^ν は $F_{\mathcal{M}}^\nu CH^{g-l}(J)\otimes \mathbb{Q}$ に含まれるべきサイクルであり, 実際に $F^\nu CH^{g-l}(J) \otimes \mathbb{Q}$ に含まれていることが示される. 本論文の主題は W_l^ν に付随する無限小不変量を計算することであり, それによって高次グリフィス群に関する次の定理を得る.

定理 1. $s_1, \cdots, s_m \in \mathbb{C}$ を $\mathbb{Q}$ 上代数的独立な元とし, C_s を

$$F_s = z_0^e + z_1^e + z_2^e + \sum_{i=1}^{m} s_i z_1^{e_i} z_2^{e-e_i} \qquad (2 \le e_1 < e_2 < \cdots < e_m \le e-2)$$

で定まる $\mathbb{P}^2$ 内の代数曲線とする. $1 \le \nu \le m$ かつ $1 \le l \le e-2-\nu$ のとき W_l^ν は $Grif^{g-l,\nu}(J) \otimes \mathbb{Q}$ の元としてゼロでない.

定理 1 は代数多様体の定義体の $\mathbb{Q}$ 上の超越次数を高くするに応じて, チャウ群のフィルターの次数が高いところに非自明なサイクルが存在し得るという現象をよく表している.

以下で無限小不変量の計算によりこの結果を導く過程の概略を解説する.

無限小不変量は Griffiths がホッヂ構造の変形理論により解析的に定義したものであるが, 以下のように代数的に考えることによって高次化が可能になっている. 非特異射影的代数多様体の族 $\mathcal{X} \to S$ の $s \in S(\mathbb{C})$ におけるファイバーを X_s で表すとき, $\mathcal{X}$ 上の代数的微分形式の層 $\Omega^r_{\mathcal{X}}$ のファイバーへの制限 $\Omega^r_{\mathcal{X}}|_{X_s}$ に

$$\mathrm{Gr}^\nu_{\mathrm{Fil}_S}\Omega^r_{\mathcal{X}}|_{X_s} \cong \Omega^\nu_{S,s} \otimes \Omega^{r-\nu}_{X_s}$$

となるようなフィルター Fil_S を定義する. 一方 F^ν に含まれるサイクルの族を定めるような $CH^r(\mathcal{X})$ の部分群 $F^\nu_S CH^r(\mathcal{X})$ を定義することにより, ホッヂコホモロジーへのサイクル写像

$$CH^r(\mathcal{X}) \to H^r(X_s, \Omega^r_{\mathcal{X}}|_{X_s})$$

はこれらのフィルターを保つ．このサイクル写像によって $\zeta \in F_S^\nu CH^r(\mathcal{X})$ に対応する $\mathrm{Gr}^\nu_{\mathrm{Fil}_S} H^r(X_s, \Omega^r_{\mathcal{X}}|_{X_s})$ の元を ζ の s における無限小不変量として定義する．ここで $\mathrm{Gr}^\nu_{\mathrm{Fil}_S} H^r(X_s, \Omega^r_{\mathcal{X}}|_{X_s})$ は次の複体のホモロジーと同型になる:

$$\Omega^{\nu-1}_{S,s} \otimes H^{r-1}(X_s, \Omega^{r-\nu+1}_{X_s}) \xrightarrow{\delta} \Omega^\nu_{S,s} \otimes H^r(X_s, \Omega^{r-\nu}_{X_s}) \to \Omega^{\nu+1}_{S,s} \otimes H^{r+1}(X_s, \Omega^{r-\nu-1}_{X_s}).$$

無限小不変量の計算からサイクルが $Z_0F^\nu CH^r(X_s)$ に含まれるかどうかを判定するときに有用な次の命題 2 を証明した．

命題 2. $\zeta \in F_S^\nu CH^r(\mathcal{X})$ が S の生成点 η におけるファイバーに制限して $Z_0F^\nu CH^r(X_\eta)$ に含まれるなら, ζ の η における無限小不変量は

$$M = (\Omega^\nu_{S,\eta} \otimes M')/(\mathrm{Im}(\delta) \cap (\Omega^\nu_{S,\eta} \otimes M')) \subset \mathrm{Gr}^\nu_{\mathrm{Fil}_S} H^r(X_\eta, \Omega^r_{\mathcal{X}}|_{X_\eta})$$

に含まれる．ここで M' は

$$M' = \mathrm{Ker}(H^r(X_\eta, \Omega^{r-\nu}_{X_\eta}) \to \Omega^1_{S,\eta} \otimes H^{r+1}(X_\eta, \Omega^{r-\nu-1}_{X_\eta}))$$

と定義する．

命題 2 を適用して代数的サイクルに関する結果を得るには, 無限小不変量を計算し, それが M に含まれないことを示さなければならない．実際にそれを行うために, ここからは代数曲線の族 $\mathcal{C} \to S$ を考える．ヤコビ多様体上の代数的サイクルについて, Collino と Pirola は $W_1 - (-1)^*W_1$ の無限小不変量を Griffiths の定義に従い幾何的な考察に基づいて計算している [CP]．そこで得られた無限小不変量の計算公式は, Beauville の分解を用いて解釈することによって, 代数的な別証を与えることができる．この手法は W_l^ν の無限小不変量 $\phi^\nu_{s,l}$ を計算することを可能にし, 以下の定理 3 に拡張することに成功した．$l = 1$ かつ $m = 1$ の場合が Collino と Pirola の公式である．

双対定理により $\phi^\nu_{s,l}$ を線形写像

$$\phi^\nu_{s,l} : \mathrm{Ker}(\wedge^\nu T_{S,s} \otimes H^l(\Omega^{l+\nu}_{J_s}) \to \wedge^{\nu-1} T_{S,s} \otimes H^{l+1}(\Omega^{l+\nu-1}_{J_s})) \to \mathbb{C}$$

と見ていることと, 同型 $H^q(\Omega^p_{J_s}) \cong \wedge^p H^0(\Omega^1_{C_s}) \otimes \wedge^q H^1(\mathcal{O}_{C_s})$ に注意しておく．

定理 3. $\xi_1, \cdots, \xi_m \in T_{S,s}$, $\omega_1, \cdots, \omega_{m+l} \in H^0(\Omega^1_{C_s})$, $\sigma_1, \cdots, \sigma_l \in H^1(\mathcal{O}_{C_s})$ について次を仮定する．

- $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m + l$ のとき,
$$\xi_i \cdot \omega_j = 0 \in H^1(\mathcal{O}_{C_s}),$$
- $0 \le \nu \le m - 1$ のとき, $\{i_1, \cdots, i_\nu\} \subset \{1, \cdots, m\}$, $\{j_1, \cdots, j_{\nu+1}\} \subset \{1, \cdots, m + l\}$ について
$$\phi^\nu_{s,1}(\xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_\nu} \otimes \omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_{\nu+1}} \otimes \sigma_1) = 0.$$

このとき

$$\begin{aligned}\phi^m_{s,l}(&\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_m \otimes \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{m+l} \otimes \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_l) \\ &= \sum_{\mathbf{j}} \varepsilon_{\mathbf{j}} < \alpha^m_s(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_m \otimes \tilde{\omega}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}_{j_{m+1}}), \sigma_1 >\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\tilde{\omega}_j$ は ω_j の $H^0(\Omega^1_{\mathcal{C}}|_{C_s})$ における持ち上げで, $\varepsilon_{\mathbf{j}}$ は $\mathbf{j}=\{j_1,\cdots,j_{m+1}\}\subset\{1,\cdots,m+l\}$ に対し, その補集合を $\{k_1,\cdots,k_{l-1}\}$ とするとき,

$$\varepsilon_{\mathbf{j}} \;=\; \mathrm{sgn}(j_1,\cdots,j_{m+1},k_1,\cdots,k_{l-1})\cdot\det\begin{pmatrix} <\omega_{k_1},\sigma_2> & \cdots & <\omega_{k_1},\sigma_l> \\ & \cdots & \\ <\omega_{k_{l-1}},\sigma_2> & \cdots & <\omega_{k_{l-1}},\sigma_l> \end{pmatrix},$$

と定義する.

定理 3 における写像 α^m_s は合成写像

$$\begin{aligned}&\wedge^m T_{S,s}\otimes\wedge^{m+1}H^0(\Omega^1_{\mathcal{C}}|_{C_s})\to\wedge^m T_{S,s}\otimes H^0(\Omega^{m+1}_{\mathcal{C}}|_{C_s})\\ &\qquad\to\wedge^m T_{S,s}\otimes\Omega^m_{S,s}\otimes H^0(\Omega^1_{C_s})\to H^0(\Omega^1_{C_s})\end{aligned}$$

で定義され, この写像を具体的に計算することが, 定理 3 の仮定を確かめ無限小不変量を計算するときに重要になる.

α^m_s を具体的に計算するために, 扱う対象を平面曲線のヤコビ多様体に制限する. J_s のコホモロジー $H^q(\Omega^p_{J_s})$ は C_s の定義方程式 F_s のヤコビ環

$$\mathbb{C}[z_0,z_1,z_2]/(\frac{\partial F_s}{\partial z_0},\frac{\partial F_s}{\partial z_1},\frac{\partial F_s}{\partial z_2})$$

を用いて表すことができる. これを用いて α^m_s が次のように計算できることを証明した.

定理 4. $\omega_j\in H^0(\Omega^1_{C_s})$ に対応する斉次多項式を $B_j\in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(e-3))$, $\xi_i\in T_{S,s}$ に対し小平-スペンサー類 $\rho(\xi_i)\in H^1(T_{C_s})$ を代表する多項式を $G_i\in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(e))$ とする.

$$G_iB_j=D^{(0)}_{i,j}\frac{\partial F_s}{\partial z_0}+D^{(1)}_{i,j}\frac{\partial F_s}{\partial z_1}+D^{(2)}_{i,j}\frac{\partial F_s}{\partial z_2}$$

を満たす $D^{(k)}_{i,j}\in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(e-2))$ がとれるとき, $\xi_i\cdot\omega_j=0\in H^1(\mathcal{O}_{C_s})$ で,

$$\begin{cases}E^{(0)}_{i,j}=z_2D^{(1)}_{i,j}-z_1D^{(2)}_{i,j}\\ E^{(1)}_{i,j}=z_0D^{(2)}_{i,j}-z_2D^{(0)}_{i,j}\\ E^{(2)}_{i,j}=z_1D^{(0)}_{i,j}-z_0D^{(1)}_{i,j}\end{cases}$$

とおくとき $E^{(k)}_{i,j}$ は ω_j の $H^0(\Omega^1_{\mathcal{C}}|_{C_s})$ における持ち上げ $\tilde{\omega}_j$ を定める. $A_{\mathbf{i}}\in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(e-3))$ を $\alpha^\nu_s(\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_\nu\otimes\tilde{\omega}_1\wedge\cdots\wedge\tilde{\omega}_{\nu+1})$ に対応する斉次多項式とするとき, $A_{\mathbf{i}}$ は次の関係式で決まる:

$$\det\begin{pmatrix}E^{(k)}_{1,1} & \cdots & E^{(k)}_{1,\nu+1}\\ & \cdots & \\ E^{(k)}_{\nu,1} & \cdots & E^{(k)}_{\nu,\nu+1}\\ B_1 & \cdots & B_{\nu+1}\end{pmatrix}\equiv A_{\mathbf{i}}(\frac{\partial F_s}{\partial z_k})^\nu\ (mod\ F_s).$$

定理 1 の方程式が定める平面曲線の族に対し, 定理 3 と定理 4 を適用し,

$$\phi^{\nu}_{s,l}(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_\nu \otimes \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{\nu+l} \otimes \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_l) \neq 0$$

となるような $\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_\nu \otimes \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{\nu+l} \otimes \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_l$ を命題 3 における空間 M の直交補空間の中から具体的に見つけ出すことによって, 代数的サイクルに関する結果である定理 1 を導いた.

参考文献

[AS] M. Asakura and S. Saito: Filtration on Chow groups and higher normal functions, preprint.

[B] A. Beauville: Sur l'anneau de Chow d'une variété abélienne, Math. Ann. **273** (1986), 647-651.

[C] G. Ceresa: C is not algebraically equivalent to C^- in its Jacobian, Ann. of Math. **117** (1983), 285-291.

[CP] A. Collino and G. Pirola: The Griffiths infinitesimal invariant for curve in its Jacobian, Duke Math. J. **78** (1995), 59-88.

[G] P. Griffiths: Infinitesimal variations of Hodge structure (III): Determinantal varieties and the infinitesimal invariant of normal functions, Compositio Math. **50** (1983), 267-324.