論文審査の結果の要旨

氏名 池田 京司

池田君は本論文において, 代数曲線の対称積が定める Jacobian の代数的サイクルについて研究し, ある種の平面曲線に対し, このサイクルの類が高次 Griffiths 群とよばれる群の自明でない元を与えた.

代数多様体 X に対し, その余次元 r の代数的サイクルのなす群を有理同値でわった群 $CH^r(X)$ は, Chow 群とよばれ代数幾何, 数論幾何の重要な研究対象である. 次のようなモティーフの哲学に基づき斉藤秀司は, 体 k 上の射影非特異代数多様体 X の Chow 群 $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ の減少フィルトレーション $F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ を定義した. Chow 群 $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ はモチヴィック・コホモロジー群 $H^{2r}_M(X, \mathbb{Q}(r))$ と一致し, スペクトル系列 $H^p_M(k, H^q_M(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}(r))) \Rightarrow H^{p+q}_M(X, \mathbb{Q}(r))$ がある. さらに彼は高次 Griffiths 群 $\mathrm{Griff}^{r,\nu}(X)$ を商

$$F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}}/(F^{\nu+1}CH^r(X)_{\mathbb{Q}} + \sum \mathrm{Im}(\Gamma^* : F^\nu CH_0(Y)_{\mathbb{Q}} \to F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}}))$$

として定義した. ただしここで Y は体 k 上の射影非特異代数多様体を走り, Γ は代数的対応 $CH^r(X \times Y)$ を走るものとする. これは部分商 $Gr^\nu_F H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}}) = F^\nu H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}})/F^{\nu+1}H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}})$ のうちで, 代数的に 0 と同値なもの全体のなす部分群である.

この論文で考察される代数的サイクルは, 次のように定義されるものである. C を体 k 上定義された射影非特異な種数 g の代数曲線とする. C の k 有理点を 1 つとって C の l 次対称積 $\mathrm{Sym}^l C$ から Jacobian$J$ への射を定める. $W_l \in CH^{g-l}(J)$ を, この射の像が定めるサイクル類とする. J は Abel 多様体だから, $CH^r(J)$ は

$$CH^r(J)^{(\nu)} = \{a \in CH^r(J) |\ \text{すべての整数}\ k\ \text{に対し}\ k^*a = k^{2r-\nu}a\}$$

とおくと, $CH^r(J) = \bigoplus_\nu CH^r(J)^{(\nu)}$ のように直和分解する. $CH^r(J)$ のフィルトレーション $F^\nu CH^r(J)$ は, $F^\nu CH^r(J) = \sum_{\nu' \geq \nu} CH^r(J)^{(\nu')}$ として与えられる. この直和分解に従い $W_l = \sum W_l^\nu$ とおく. この $W_l^\nu \in CH^r(J)^{(\nu)} = Gr^\nu_F CH^r(J)$ が, この論文で考える代数的サイクルである.

このサイクル $W_l^\nu \in F^\nu CH^r(J)$ が Griffiths 群の 0 でない元を与えることを示すために, 無限小不変量とよばれる写像を次のように定義する. これは Hodge コホモロジーへのサイクル写像から生じるものである. 一般に X を標数 0 の体 k 上の射影非特異代数多様体とし, $CH^r(X) \to H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}})$ をサイクル写像とする. 完全系列 $0 \to \Omega^1_{k/\mathbb{Q}} \to \Omega^1_{X/\mathbb{Q}} \to 0$ により $\Omega^r_{X/\mathbb{Q}}$ にフィルトレーションが定まり, これはさらにコホモロジー $H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}})$ のフィルトレーション $F^\nu H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}})$ をひきおこす. 部分商 $Gr^\nu_F H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}}) = F^\nu H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}})/F^{\nu+1}H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}})$ は, 複体

$$\Omega^{\nu-1}_{k/\mathbb{Q}} \otimes H^{r-1}(X, \Omega^{r-\nu+1}_{X/k}) \to \Omega^\nu_{k/\mathbb{Q}} \otimes H^r(X, \Omega^{r-\nu}_{X/k}) \to \Omega^{\nu+1}_{k/\mathbb{Q}} \otimes H^{r+1}(X, \Omega^{r-\nu-1}_{X/k})$$

のコホモロジー群と自然に同一視される．このフィルトレーションは de Rham コホモロジーに対する Leray スペクトル系列から生じるものの Hodge フィルトレーションに関する部分商をとったものと考えることができる．サイクル写像 $CH^r(X) \to H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}})$ はフィルトレーション $F^\nu CH^r(X)$ を $F^\nu H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}})$ に写す．したがって，部分商の間の写像 $Gr^\nu_F CH^r(X) \to Gr^\nu_F H^r(X, \Omega^r_{X/\mathbb{Q}})$ がひきおこされる．X を上で考えた Jacobian$J$ として，この写像による W_l の像を調べることにより，W_l が Griffiths 群の元として 0 でないことを示すのが証明の方針である．

この論文の主結果は次のとおりである．C を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の m 変数有理関数体 $k = \mathbb{Q}(s_1, \ldots, s_m)$ 上の方程式

$$z_0^e + z_1^e + z_2^e + \sum_{i=1}^{m} s_i z_1^{e_i} z_2^{e-e_i}$$

(ただし $2 \leq e_1 < e_2 \cdots < e_m \leq e-2$) で定義された平面代数曲線とする．$1 \leq \nu m$ かつ $1 \leq l \leq e-2-\nu$ ならば W_l が Griffiths 群の元として 0 でない．

$l = 1$ の場合にはこの代数的サイクルは Ceresa, Collino-Pirola らにより研究された．この場合には彼らによりこのサイクルが Griffiths 群の非自明な元を与えることが示されていた．しかし，高次元の場合において無限小不変量を研究し，Griffiths 群の非自明な元を与えたのは，初めてのことと思われる．

よって論文提出者 池田 京司 は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．