論文の内容の要旨

The geometry of embeddings and immersions of 3-manifolds into 5-space
(和訳： 3 次元多様体の 5 次元空間への埋め込みとはめ込みの幾何)

高瀬 将道

多様体を他のよく知られた多様体へ埋め込む, あるいははめ込むことは, 多様体の形を明らかにする一つの方法であるから, 埋め込みやはめ込みの問題は長い間位相幾何学の中心的な話題の一つであった. 多様体間のはめ込みの正則ホモトピーによる分類問題は, Smale と Hirsch の理論によって, ホモトピー論に帰着した. 特に Smale 不変量は, 球面のユークリッド空間へのはめ込みの正則ホモトピーの完全不変量である. しかしながら Smale と Hirsch の理論は, 「与えられた正則ホモトピー類を表すはめ込みどのようなものなのか」, あるいは, 「どの類が埋め込みによって表されるのか」といった幾何的な問いには答えていない. この論文の主たる目的は, 有向閉 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みのこのような幾何的様相についての研究である.

始めに, いくつかの既に知られている研究について述べる. $\mathbf{Imm}[X,Y]$ を多様体 X から多様体 Y へのはめ込みの正則ホモトピー類全体からなる集合とし, $\mathbf{Emb}[X,Y] \subset \mathbf{Imm}[X,Y]$ を埋め込みで表される類からなる部分集合とする. このとき, $\mathbf{Imm}[S^n,\mathbf{R}^N]$ には連結和による群構造が入り, Smale 不変量は, 群の同型 $\Omega : \mathbf{Imm}[S^n,\mathbf{R}^N] \to \pi_n(V_{N,n})$ を与える. Smale 不変量を, 与えられたはめ込みの (例えば, 自己交差といった) 幾何から読み取ろうとする研究は次のように比較的多く行われている.

(イ) (Whitney の 2 重点公式) はめ込み $S^n \looparrowright \mathbf{R}^{2n}$ $(n > 1)$ の Smale 不変量

$$\Omega : \mathbf{Imm}[S^n, \mathbf{R}^{2n}] \xrightarrow{\approx} \begin{cases} \mathbf{Z} & (n : \text{ even }) \\ \mathbf{Z}_2 & (n : \text{ odd }) \end{cases}$$

は, (自己横断的な) はめ込みの 2 重点の数で決まる.

(ロ) (Ekholm) $S^n \looparrowright \mathbf{R}^{2n-1}$ $(n > 3)$ と $S^n \looparrowright \mathbf{R}^{2n-2}$ の場合にも, それらの Smale 不変量は自己交差の言葉で表せる.

(ハ) (Hughes-Melvin) $\mathbf{Imm}[S^{4k-1}, \mathbf{R}^{4k+1}]$ $(k \geq 1)$ の中で, 埋め込みによって表される類は加算無限個ある. また, 埋め込み $f : S^{4k-1} \hookrightarrow \mathbf{R}^{4k+1}$ の Smale 不変量は f に対する Seifert 膜 (4k 次元多様体) の指数で決定できる.

この (ハ) の結果は球面の埋め込みの正則ホモトピーによる分類を与えているという点で興味深い. 同時に, はめ込み $S^{4k-1} \looparrowright \mathbf{R}^{4k+1}$ の正則ホモトピー類は一般にその自己交差の情報から決められないということを示している. しかしながら, 埋め込みに対してはその Smale 不変量は Seifert 膜の指数で決定できるという別の観点の幾何公式を与えているとも思えて, この意味で次は更なる一般化を与えている.

(ニ) (Ekholm-Szűcs) はめ込み $S^{4k-1} \looparrowright \mathbf{R}^{4k+1}$ の Smale 不変量は, 与えられたはめ込みが境界になるような $4k$ 次元多様体のジェネリック写像 (“特異 Seifert 膜”) の幾何的な情報 (特異点の数など) で決定できる.

この論文では, 以上のような流れに沿った研究を, 球面に限らない有向閉 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みに対して行う. 以下, この論文の内容を概説する. M^3 を有向閉 3 次元多様体とする.

第 1 章は, 基本的な概念や記号の定義を含むイントロダクションである. 第 1 章の第 4 節では, M^3 の $\mathbf{R}^4$ へのはめ込みの正則ホモトピー類と M^3 の安定枠付け (stable framing) との関係について, 短い考察を与える.

第 2 章では, 上の (ハ) の結果を $\mathbf{Z}_2$ 係数ホモロジー 3 球面 M^3 の $\mathbf{R}^5$ へのはめ込みの場合に拡張する. 主な結果は次の通りである. M^3 の埋め込み $F_0 : M^3 \hookrightarrow \mathbf{R}^5$ を一つ固定する. 球面のはめ込み $g : S^3 \looparrowright \mathbf{R}^5$ に対して, F_0 と g の連結和を対応させて決まる写像を

$$\sharp_{F_0} : \mathbf{Imm}[S^3, \mathbf{R}^5] \to \mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]$$

とする. 実際にはこの写像の像は自明な法束を持つはめ込みの類からなる部分集合 $\mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0 \subset \mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]$ の中にあって, 次を得る.

命題. $H^2(M^3; \mathbf{Z})$ が位数 2 の元を持たないとする. このとき,

$$\sharp_{F_0} : \mathbf{Imm}[S^3, \mathbf{R}^5] \longrightarrow \mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0$$

は全単射である.

次の定理は, この写像が $\mathbf{Z}_2$ 係数ホモロジー 3 球面に対しては埋め込みが表す部分集合のあいだの全単射を与えること, さらに $\mathbf{Z}_2$ 係数ホモロジー 3 球面の埋め込みの正則ホモトピー類はその Seifert 膜の指数で完全に決定できることを示している. 興味深いのは, 下の $\sigma(W_F^4) \pmod{16}$ は M^3 の μ-不変量になることである.

定理. $H^1(M^3;\mathbf{Z}_2) = 0$ とする. このとき,

$$\sharp_{F_0} : \mathbf{Emb}[S^3, \mathbf{R}^5] \longrightarrow \mathbf{Emb}[M^3, \mathbf{R}^5]$$

は全単射である. さらに, 全単射 $\Omega \circ (\sharp_{F_0})^{-1} : \mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0 \overset{\approx}{\to} \mathbf{Z}$ のもとに,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Emb}[M^3, \mathbf{R}^5] & \xrightarrow{\approx} & 24\mathbf{Z} \\ F & \longmapsto & \frac{3}{2}(\sigma(W_F^4) - \sigma(W_{F_0}^4)) \end{array}$$

ここで W_F^4 は F の Seifert 膜, $\sigma(W_F^4)$ はその指数を表す.

第 3 章では, 一般の有向閉 3 次元多様体 M^3 の $\mathbf{R}^5$ へのはめ込みに対して (二) で与えられた Smale 不変量の幾何公式の類似を与える. 自動的に第 2 章の結果を拡張し, 3 次元トーラスの埋め込みに対してある奇妙な現象を観察する. 第 3 章とその補足は佐伯 修と András Szűcs との共同研究によるものである.

以下に第 3 章の結果をまとめる. $\Gamma_2(M^3) := \{C \in H^2(M^3;\mathbf{Z}) \,|\, 2C = 0\}$ とおく. 我々はすでに Wu の結果によって, M^3 の接束 TM^3 の自明化を一つ固定することにより, 全単射 $\mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0 \xrightarrow{\approx} \Gamma_2(M^3) \times \mathbf{Z}$ を得るが, その幾何的な内容は明らかでない.

我々はまず, この写像の第一成分への射影 $c : \mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0 \to \Gamma_2(M^3)$ を Wu 不変量と名づけ, これを次のように幾何的に解釈する (第 3 節). TM^3 の自明化を一つ固定したことにより, M^3 の各スピン構造は $H^1(M^3;\mathbf{Z}_2)$ の元に対応することに注意する. すなわち我々が示すのは, 自明な法束を持つはめ込み $F : M^3 \looparrowright \mathbf{R}^5$ に対して, M^3 のスピン構造を $\rho : H^1(M^3;\mathbf{Z}) \to H^1(M^3;\mathbf{Z}_2)$ (ρ は mod 2 写像 $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2$ に誘導される準同型) の像による違いを除いて決定でき, Gysin の完全系列による同型 $H^1(M^3;\mathbf{Z}_2)/\rho(H^1(M^3;\mathbf{Z})) \approx \Gamma_2(M^3)$ によるその像が Wu 不変量 $c(F)$ になることである. さらに我々は, 任意の $C \in \Gamma_2(M^3)$ に対し, $c(F) = C$ となる埋め込み $F : M^3 \hookrightarrow \mathbf{R}^5$ が存在することを示す. これは, $\mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0 \xrightarrow{\approx} \Gamma_2(M^3) \times \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \amalg \cdots \amalg \mathbf{Z}$ の右辺の各 $\mathbf{Z}$ が埋め込みで表される類を含んでいるということである.

次に第 4 節で, 各 $C \in \Gamma_2(M^3)$ に対し, 埋め込み $F_0 \in \mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0^C := c^{-1}(C)$ をひとつとると, 第 2 章と同様に定義される写像

$$\sharp_{F_0} : \mathbf{Imm}[S^3, \mathbf{R}^5] \longrightarrow \mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0^C$$

が全単射であることを示す.

第 5 節では, 我々は 2 種類の写像 i_a, i_b を下のように定義する. これらは, (二) で与えられた Smale 不変量の 2 種類の幾何公式の類似である. 下の定義中, $F : M^3 \looparrowright \mathbf{R}^5$ を自明な法束を持つはめ込み, $\alpha(M^3)$ を $\mathbf{Z}_2$ ベクトル空間 $\tau H_1(M^3;\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2$ の次元とする, ここで $\tau H_1(M^3;\mathbf{Z})$ は $H_1(M^3;\mathbf{Z})$ のねじれ部分群である. また, 定義中の $\widetilde{F} : W^4 \to \mathbf{R}^5$ (または $\hat{F} : W^4 \to \mathbf{R}^6_+$) を我々はしばしば '特異 Seifert 膜' と呼ぶ.

定義. W^4 を $\partial W^4 = M^3$ なるコンパクトな有向 4 次元多様体, $\widetilde{F} : W^4 \to \mathbf{R}^5$ を境界の近傍に特異点を持たないジェネリック写像で $\widetilde{F}|_{\partial W^4} = F$ なるものとする. このとき,

$$i_a(F) := \frac{3}{2}(\sigma(W^4) - \alpha(M^3)) + \frac{1}{2}\#\Sigma^{1,1}(\widetilde{F})$$

と定義する. ここで, $\widetilde{F}$ のカスプ特異点の代数的個数を $\#\Sigma^{1,1}(\widetilde{F})$ とする.

定義. W^4 を上と同様, $\hat{F} : W^4 \to \mathbf{R}^6_+$ を境界の近傍に特異点を持たないジェネリック写像で $\hat{F}^{-1}(\mathbf{R}^5) = \partial W^4$ かつ $\hat{F}|_{\partial W^4} = F$ なるものとする. このとき,

$$i_b(F) := \frac{3}{2}(\sigma(W^4) - \alpha(M^3)) + \frac{1}{2}(3t(\hat{F}) - 3l(\hat{F}) + L(F))$$

と定義する. ここで, $t(\hat{F})$ は $\hat{F}$ の 3 重点の代数的個数, $l(\hat{F})$ は $\hat{F}$ の特異点集合と $\hat{F}(W^4)$ との絡みをはかる数, $L(F)$ は F の 2 重点集合と $F(M^3)$ の絡みをはかる数である.

第 3 章第 5 節で我々が示すのは, おもに

- 上の i_a, i_b が一致すること,
- この $i = i_a = i_b$ が正則ホモトピーの整数値の不変量

  $$i : \mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0 \to \mathbf{Z}$$

  となること, さらに
- Wu 不変量と合わせて,

  $$(c, i) : \mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0 \to \Gamma_2(M^3) \times \mathbf{Z}$$

  が, 全単射になること

である. 直接的な系として, 次を得る.

系. $\Gamma_2(M^3) = 0$ とする. このとき, 2 つの埋め込み $F, G : M^3 \hookrightarrow \mathbf{R}^5$ は, それらの張る Seifert 膜の指数が等しいとき, またそのときに限り, 互いに正則ホモトピックである.

第 6 節では, 3 次元トーラスの場合には埋め込みの表する類が球面の場合の "2 倍" ある, つまり, 球面の場合は (ハ) の結果により

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Emb}[S^3, \mathbf{R}^5] & \subset & \mathbf{Imm}[S^3, \mathbf{R}^5] \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ 24\mathbf{Z} & \subset & \mathbf{Z} \end{array}$$

であったが, T^3 の場合には

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Emb}[T^3, \mathbf{R}^5] & \subset & \mathbf{Imm}[T^3, \mathbf{R}^5] \\ \big\downarrow \text{同型} & & \big\downarrow \text{同型} \\ 12\mathbf{Z} & \subset & \mathbf{Z} \end{array}$$

であることを示し, 今まで述べた結果と合わせ, 次の系を得る.

系. S^3 の $\mathbf{R}^5$ へのはめ込み g で次のような性質を持つものがある:

(A) g はどんな埋め込みにも正則ホモトピックでない.

(B) T^3 の $\mathbf{R}^5$ への任意の埋め込みに g を連結和したものは, 再びある埋め込みに正則ホモトピックである.

第 7 節では, 第 5 節の i_a, i_b の整数性から従う, 特異 Seifert 膜のとり得るカスプ特異点の数に関するいくつかの系を述べる.

第 3 章の補足では, 第 6 節の系と同様の現象が T^3 以外の 3 次元多様体でも多く観察されることを示す. 同時に次のように, S^3 と T^3 の場合がある意味ですべてを網羅していることも示す:

命題. M^3 を任意の有向閉 3 次元多様体とする. このとき, $\mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0 \approx \Gamma_2(M^3) \times \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \amalg \cdots \amalg \mathbf{Z}$ の各 $\mathbf{Z}$-成分

$$\mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0^C \approx \mathbf{Z} \quad (C \in \Gamma_2(M^3))$$

の中で, 埋め込みが表す類は, $24\mathbf{Z}$ または $12\mathbf{Z}$ に同型な部分群を成す (各 $\mathbf{Imm}[M^3, \mathbf{R}^5]_0^C$ には, その中の埋め込みをひとつ固定して 連結和とる操作により, $\mathbf{Imm}[S^3, \mathbf{R}^5]$ から誘導される群構造が入る).