論文審査の結果の要旨

氏名　高瀬　将道

与えられた多様体 M から別の多様体 N へのはめ込み (immersion) 全体を正則ホモトピーで分類する理論は1950年代の終わりにS.SmaleとM.Hirschにより完成した．それによれば，M から N へのはめ込み全体を正則ホモトピーの関係で分類した集合 $Imm[M,N]$ は，接ベクトル束の間の単射線形ファイバー写像 $TM \to TN$ の全体を線形ファイバーホモトピーの関係で分類した集合 $Mono[M,N]$ と全単射的に対応する．従って，はめ込みの分類はホモトピー論の計算に帰着されることになり，幾何学的なトポロジーとしては，はめ込みの分類理論は既に終わったものと考えられていた．

ところが，1980年代の中頃から，おもに結び目理論の影響により，M から N への埋めこみ (embedding) を正則ホモトピーで分類する問題が意識されるようになり，はめ込みの分類理論は新たな視点から興味を持たれるようになった．とくに著しい結果はJ.HughesとP.Melvinによるものである．彼らは，n 次元球面から $n+2$ 次元空間への埋めこみを考え，$n=4k-1$ $(k \geq 1)$ のとき，はめ込みを分類した集合 $Imm[S^n, \mathbb{R}^{n+2}]$ の中で，埋めこみによって代表される部分集合 $Emb[S^n, \mathbb{R}^{n+2}]$ が可算無限集合をなすこと，一方，次元 n が $n \neq 4k-1$ である場合は，$Emb[S^n, \mathbb{R}^{n+2}]$ はただ一つの要素からなる集合であることを証明した．例えば，$n=1$ の場合は，古典的な結び目（円周 S^1 から3次元空間 $\mathbb{R}^3$ への埋めこみ）に相当するが，どんな埋めこみも，自己交差を許す正則ホモトピーで自明な結び目に変形できることが知られている（結び目解消操作）．$n=3$ の場合は，このような古典的な場合と著しい対照をなしており，3次元球面 S^3 の5次元空間 $\mathbb{R}^5$ の中の結び目であって，いかなる結び目解消操作によっても解けないものが存在することがわかる．

提出された論文は，このような結果を，一般の向き付けられた3次元閉多様体 M から5次元空間 $\mathbb{R}^5$ への埋めこみの分類の研究に拡張したものである．まず，論文の前半では，Hughes-Melvinの結果を3次元 $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面 M の場合に拡張し，次の定理を証明している．

定理：自明な法ベクトル束を持つはめ込みを正則ホモトピーの関係で分類した集合 $Imm[M^3, \mathbb{R}^3]_0$ はSmale不変量を通して $\mathbb{Z}$ と同型であり，そのなかで，

埋めこみによって代表される類は $24\mathbb{Z}$ に対応する部分集合をなす．この同型

$$Emb[M^3, \mathbb{R}^5] \to 24\mathbb{Z}$$

は次のように与えられる．M の $\mathbb{R}^5$ への基準となる埋めこみ $F_0 : M \to \mathbb{R}^5$ と $F_0(M)$ を $\mathbb{R}^5$ のなかで張る 4 次元多様体 W_0(「Seifert 膜」) を固定しておく．任意の埋めこみ $F : M \to \mathbb{R}^5$ に対し，$F(M)$ の「Seifert 膜」となるような 4 次元多様体 W をとれば，上の同型は

$$F \mapsto \frac{3}{2}(\sigma(W) - \sigma(W_0))$$

という対応で与えられる．

興味深いことは，W の符号数 $\sigma(W)$ を $\mod 16$ で考えたものは，初めの多様体 M の μ 不変量 $\mu(M)$ という（埋めこみによらない）位相不変量なのであるが，$\mu(M)$ 不変量の整数の群 Z への持ち上げ $\sigma(W)$ は，M の $\mathbb{R}^5$ への特定の埋めこみの正則ホモトピー類を決めているということである．

論文の後半では，一般の 3 次元多様体 M について研究している．$\Gamma_2(M) = \{C \in H^2(M;\mathbb{Z}) | 2C = 0\}$ とおくとき，既に W.-T. Wu により，自明な法ベクトル束を持つはめ込みの分類に関して，

$$Imm[M, \mathbb{R}^5]_0 \cong \Gamma_2(M) \times \mathbb{Z}$$

であることが証明されている．次の定理が論文後半の主結果である．

定理：各々の $C \in \Gamma_2(M)$ に対し，上記の同型で $\{C\} \times \mathbb{Z}$ に対応する因子は埋めこみを含む．各因子 $\{C\} \times \mathbb{Z}$ のなかで，埋めこみによって代表される類は $\{C\} \times 12\mathbb{Z}$ または $\{C\} \times 24\mathbb{Z}$ に対応する部分集合をなす．

さらに，M のはめ込みに 3 次元球面のはめ込みを連結和する操作の及ぼす影響を完全に決定している．このことから得られる一つの驚くべき事実として，次のことがわかる．3 次元トーラス T^3 から $\mathbb{R}^5$ への，正則ホモトピーで結べない二つの埋めこみ F と G があり，それ自身は埋めこみと正則ホモトピーで結ばれないある球面のはめ込み $g : S^3 \to \mathbb{R}^5$ を埋めこみ F に連結和すると，その結果 $F\#g$ は埋めこみ G に正則ホモトピーで結ばれる．

後半は論文提出者と佐伯　修氏，András Szücs 氏との共著であるが，共著者からは論文提出者の博士論文として提出することの同意が得られている．

以上のように，提出された論文は，3 次元多様体から 5 次元空間への埋めこみの正則ホモトピーによる分類について決定的な結果を証明したものである．

よって，論文提出者　高瀬　将道　は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な学識があると認める．