論文の内容の要旨

“Some examples of principal series representations with special paramters of the degenerate affine Hecke algebra”

「退化アフィンヘッケ代数の特別なパラメータを持つ
主系列表現の幾つかの例（日本語訳）」

氏名　本田 龍央

岩堀-Hecke 代数の 1 つの variant として退化 (次数化) affine Hecke 代数と呼ばれる $\mathbb{C}$ 上の代数 $\mathbf{H}$ が Drinfeld, Lusztig 等によって独立に導入された．この代数は Dunkel 作用素等の微分差分作用素や Weyl 群の作用を経由して関数空間に表現が構成され，Calogero-Sutherland 模型の固有値問題や共形場理論に現れる KZ 方程式系等, 様々な応用を持つ．ここでは $\mathbf{H}$ の有限次元表現を考える．特に $\mathbf{H}$ の有限次元の表現論は affine Hecke 代数の有限次元の表現論と等価になることが知られている．退化 affine Hecke 代数の既約表現は同変 cohomology 等を用いた幾何学的構成による分類等が知られているが, 一方, 主系列表現と呼ばれる特別な加群の族が存在し, 任意の既約表現はその 1 つの sub-quotient として実現されることが知られている．そこで特にこの主系列表現を解析する．

主系列表現について述べるために少し記号を導入する．$\mathfrak{a}$ を n 次元 Euclid 空間とし，$\mathfrak{h}$ をその複素化とする．不定元 c をとり $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c$ とし，$S(\widehat{\mathfrak{h}})$ を $\widehat{\mathfrak{h}}$ の対称代数とする．R を $\mathfrak{a}$ 上の root system とし, その positive system R_+ を 1 つ固定する．W を R の Weyl 群とし，$\mathbb{C}[W]$ をその複素数体 $\mathbb{C}$ 上の群環とする．また R 上の W 不変な関数 k をとるとき, 退化 affine Hecke 代数 $\mathbf{H} = \mathbf{H}(R_+, k)$ とは $\mathbb{C}$ 線形空間として $\mathbf{H} \cong \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} S(\widehat{\mathfrak{h}})$ という形であり，$S(\widehat{\mathfrak{h}}), \mathbb{C}[W]$ を部分代数として含み, 更に k を含む或る関係式をみたすものとして定義される．$\mathbf{H}$ の主系列表現とは $\widehat{\mathfrak{h}}$ の双対空間 $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ の元 λ に対し

$$\mathbf{I}_\lambda := \mathrm{Ind}_{S(\widehat{\mathfrak{h}})}^{\mathbf{H}} \mathbb{C}_\lambda = \mathbf{H} \otimes_{S(\widehat{\mathfrak{h}})} \mathbb{C}_\lambda$$

という λ に付随する $S(\widehat{\mathfrak{h}})$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_\lambda$ からの誘導表現として得られる加群のことをいう. 任意の root α に対し $\lambda(\alpha^\vee) \neq \pm k_\alpha \lambda(c)$ となることと $\mathbf{I}_\lambda$ が既約であることが同値であり, また, $\mathbf{I}_{w\lambda}$ と $\mathbf{I}_\lambda$ は重複度を込めて同じ組成因子を持つことが知られている. 特に後者に注意して, 我々は "λ の W 軌道内の適当な 1 つ parameter $w\lambda$ に対応する $\mathbf{I}_{w\lambda}$ の組成列を具体的に構成する" という問題を考えることにする. ただし, この適当な $w\lambda$ の取り方は主系列の別の模型との関連から自然に与えられることに注意する. ここでこの $w\lambda$ を改めて λ と記すことにする.

λ が正則 (任意の $\alpha \in R$ に対し $\lambda(\alpha^\vee) \neq 0$) であるとき, α に対し $\lambda(\alpha^\vee) = k_\alpha \lambda(c)$ となると $\mathbf{I}_\lambda$ の既約性が崩れることに注意して, このような simple root からなる root の部分集合を F とすると, 各 $\alpha \in F$ に対し $\pi_{r_\alpha} : \mathbf{I}_{r_\alpha \lambda} \to \mathbf{I}_\lambda$ という intertwiner が存在し, これらの共通部分, 及びその和を取ることにより組成列が構成できる. このようにして得られる組成列を放物型組成列と呼ぶことにする. 従って λ が正則な場合は簡単に組成列が構成できるのだが, 一方, λ が正則ではない場合には問題は非常に複雑になる.

この論文では, 第一に, 一般の λ に対する $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列の構成は, 任意の simple root α に対し $\lambda(\alpha^\vee)$ が 0 か $k_\alpha \lambda(c)$ のどちらか一方になる特殊な λ に対する $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列の構成に帰着されることを示した. もう少し詳しく述べると, 先ず $\lambda(\alpha^\vee) = 0$ または $k_\alpha \lambda(c)$ となる simple root の集合 F に対し, F によって生成される W の放物型部分群を W_F とし, 更に $\alpha^\vee$ $(\alpha \in F)$ 及び c から生成される $\widehat{\mathfrak{h}}$ の部分空間を $\widehat{\mathfrak{h}}_F$, また $\mathfrak{h}^F$ を $\widehat{\mathfrak{h}}_F$ の直交補空間とするとき, W_F と $S(\widehat{\mathfrak{h}}_F)$ (resp. $S(\widehat{\mathfrak{h}})$) によって生成される $\mathbf{H}$ の部分代数 $\mathbf{H}_F$ (resp. $\mathbf{P}_F$) を考える. また, λ を $\widehat{\mathfrak{h}}_F$, $\mathfrak{h}^F$ に制限したものを λ_F, λ^F とする. λ_F に対応する $S(\widehat{\mathfrak{h}}_F)$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_{\lambda_F}$ から誘導される $\mathbf{H}_F$ の表現 $\mathbf{I}_{\lambda_F} = \mathbf{H}_F \otimes_{S(\widehat{\mathfrak{h}}_F)} \mathbb{C}_{\lambda_F}$ の任意の組成列

$$0 \subsetneq I_m \subsetneq \cdots \subsetneq I_1 \subsetneq I_0 = \mathbf{I}_{\lambda_F}$$

をとる. このとき $\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{P}_F} (\mathbb{C}_{\lambda^F} \otimes \mathbf{I}_{\lambda_F}) \cong \mathbf{I}_\lambda$ に注意すると

$$0 \subsetneq \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{P}_F} (\mathbb{C}_{\lambda^F} \otimes I_m) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{P}_F} (\mathbb{C}_{\lambda^F} \otimes I_1) \subsetneq \mathbf{I}_\lambda \tag{1}$$

という $\mathbf{I}_\lambda$ の部分加群の狭義単調減少列を得る. このとき

Theorem 1 狭義単調減少列 (1) は $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列となる.

従って $\mathbf{I}_\lambda$ の構造は $\mathbf{H}_H \otimes_{S(\hat{\mathfrak{h}})} \mathbb{C}_{\lambda_F}$ のみに依存することになる.

第二に, R を A 型に限定し, また任意の simple root α に対し, $\lambda(\alpha^\vee) = 0, k\lambda(c)$ となる場合を考え, 幾つかの典型的な $\mathbf{I}_\lambda$ の例を与えた. これらの例からの帰結として, $\mathbf{I}_\lambda$ が放物型組成列を持つための λ についての必要十分条件を与えた. これについてもう少し詳しく述べるために, Dynkin 図形の頂点に対応する α が $\lambda(\alpha^\vee) = 0$ (resp. $= k\lambda(c), \neq 0, k\lambda(c)$) となるとき, その頂点を $\blacksquare$ (resp. $\circledcirc, \circ$) として, λ に対し Dynkin 図形の類似の図形 $D(\lambda)$ を対応させる. また $D(\lambda)$ の連結な部分図形 D で各頂点が $\blacksquare$, $\circledcirc$ のみからなり, 更にこのような連結な部分図形で D を真に含むものが存在しないとき, D を $D(\lambda)$ の特異成分と呼ぶことにする. このとき次が成立する :

Theorem 2 *R が A 型のとき, $\mathbf{I}_\lambda$ が放物型組成列を持つための必要十分条件は $D(\lambda)$ の各特異成分が次のいずれかになる場合である.*

type 1 :

$$\overset{1}{\circledcirc} - \cdots - \overset{b}{\circledcirc} - \overset{b+1}{\blacksquare} - \cdots - \overset{n}{\blacksquare}$$

$$or \quad \overset{1}{\blacksquare} - \cdots - \overset{b}{\blacksquare} - \overset{b+1}{\circledcirc} - \cdots - \overset{n}{\circledcirc} \qquad (1 \leq b \leq n),$$

type 2 :

$$\overset{1}{\blacksquare} - \cdots - \overset{a-1}{\blacksquare} - \overset{a}{\circledcirc} - \cdots - \overset{b}{\circledcirc} - \overset{b+1}{\blacksquare} - \cdots - \overset{n}{\blacksquare} \qquad (1 < a < b < n).$$

更に標準加群と呼ばれる $\mathbf{H}$ 加群とその simple quotient に関する重複度公式を組み合わせることにより, 各組成因子の重複度が 1 であるための必要十分条件が同一のもので与えられることを示した.