論文の内容の要旨

The Godbillon-Vey cyclic cocycle for PL-foliations
(和訳： PL-葉層に対する Godbillon-Vey 巡回コサイクル)

Catherine Oikonomides

Jean-Michel Bony は, 超関数についての講義 "Cours d'analyse" (於 Ecole Polytechnique, 1993) の中で, 次のように書いている:

局所的に積分可能な関数 f に対する, 超関数の意味の微分と通常の意味の微分 (それが存在するとして) との関係は極めて複雑である. この二つの概念が明らかに同一なのは, C^1-関数に対してだけである... 二つの概念が衝突しているとき, "本当の" 微分— f の変動を完全に記述できるもの — は, 超関数の意味の微分の方であることを知っていなければならない. 区分的 C^1 関数に対して, 通常の微分はほとんどいたるところで定義されているが, 本質的な変動 — ジャンプ — を捉えていない

円周 $S^1 = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ 上の区分的 C^1 関数

$$f : S^1 \to \mathbf{R}$$

を考える. つまり, 有限の p 個の点 $x_i \in S^1$ があって,

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_p < x_{p+1} = x_1,$$

かつ, f の各閉区間 $[x_i, x_{i+1}]$ への制限 $f_{[x_i,x_{i+1}]}$ が C^1-級の関数である. 点 x_i において, f の微分は右極限と左極限を持つが well-defined ではない. 実際, f は点 x_i において, 連続でないこともある. しかしながら, f は各 x_i において右極限 $f(x_i+)$ と左極限 $f(x_i-)$ を持つ.

さて, f の超関数の意味の微分を df, また $S^1 - \{x_1, ..., x_p\}$ 上定義される通常の意味での微分を f' と書くことにすると,

$$df = f'dx + \sum_{i=1}^{p}(f(x_i+) - f(x_i-))D(x_i)$$

である. ここで, $D(x)$ は $x \in S^1$ における Dirac 測度である.

もし, $f : S^1 \to \mathbf{R}$ が階段関数であるとき, f の微分は 0 であると言いたくなるかもしれない. しかし, f のグラフを見ればすぐ分かるように, f は '変動' している. このミステリーに対する答えが上の議論である: 本当の微分, すなわち超関数の意味の微分は Dirac 測度の有限和なのである.

この事を理解しているのなら (そんなに難しいことではない), あなたはただちにこの本を閉じてよい, この事こそがこの学位論文に含まれている唯一の哲学的着想であるから. けれども, この哲学はひろく知られていることでもあるから, もう少し説明が必要である.

この論文中, S^1 の向きを保つ同相写像の成す群を Homeo(S^1) と書き, C^∞ 微分同相写像からなる部分群を Diff$^\infty(S^1)$ と書く. また, PL 同相写像 —定義より高々有限個の折れ点を持つ— のなす部分群を PL(S^1) と書く.

M を有向閉 2 次元多様体とする. 表現 $\rho : \pi_1(M) \to$ Homeo(S^1) は, ファイバーに横断的な葉層構造 $\mathcal{F}$ を持つ, M 上の S^1-束 V を引き起こす. このような対象を葉層 S^1-束と呼ぶ. 葉層 $\mathcal{F}$ は葉 (leaf) 方向になめらかである. しかし, その横断構造は全ホロノミー群 (total holonomy group) $\Gamma = \mathrm{Im}\rho \subset$ Homeo(S^1) で決定される. $\Gamma \subset$ Diff$^\infty(S^1)$ であるとき $\mathcal{F}$ をなめらかな葉層と呼び, $\Gamma \subset$ PL(S^1) であるとき PL-葉層と呼ぶ.

まずなめらかな葉層の場合を考える. 3 次元多様体 V 上のなめらかな葉層 $\mathcal{F}$ に対して, Godbillon-Vey 類が $H^3(V)$ のある de Rham コホモロジー類として Godbillon と Vey により定義された. この類を V 上積分することにより, Godbillon-Vey 不変量 $gv(\mathcal{F})$ が得られる.

Bott と Thurston は, このコサイクルを表す新しい手法, すなわち, Diff$^\infty(S^1)$ 上の群コホモロジーの 2-コサイクルとして表す方法を与えた. より正確には, $g \in$ Diff$^\infty(S^1)$ に対して, g の微分 g' はなめらかな写像 $S^1 \to]0, +\infty[$ である. 従って, 我々は

$$\forall g \in \mathrm{Diff}^\infty(S^1),\ l(g) = \log g'$$

と定義することができる. このとき, Bott-Thurston コサイクルが,

$$\forall g, h \in \mathrm{Diff}^\infty(S^1),\ \omega(g,h) = l(h)dl(gh) - l(gh)dl(h),$$

で定義され, これが次の意味で Godbillon-Vey 類に対応する: M 上の S^1-束に対して,

$$gv(\mathcal{F}) = \int_{S^1} \omega[M],$$

ここで, $[M] \in H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ は M の基本類である.

全ホロノミー群 $\Gamma \subset$ Diff$^\infty(S^1)$ を持つ M 上の葉層 S^1-束 $(V, \mathcal{F})$ に対し, Connes は Godbillon-Vey 類を葉層の C*代数の 2-トレース τ として再定義した. 葉層の C*代数は接合積 (crossed product) $C(S^1) \rtimes \Gamma$ の商に森田同値であることが知られている:

$$C^*(V, \mathcal{F}) \cong C(S^1) \rtimes \Gamma / \sim .$$

巡回コホモロジーの双対がK-理論であるから, 巡回 2-コサイクルは常にその定義域の K_0 群から $\mathbf{C}$ へのK-理論写像を定義する. 2-トレースはある種類の連続性を満たす, 稠密に定義された巡回 2-コサイクルであって, 対応するK-理論写像は大域的K-理論写像に拡張する (Connes):

$$K_0(C^*(V,\mathcal{F})) \to \mathbf{C}.$$

Godbillon-Vey 巡回コサイクル τ は, Bott-Thurston コサイクル ω を含むような公式で定義されており, Connes の指数定理による Godbillon-Vey 類と関係している. また Connes の指数定理は, 最も簡単な場合には次のように述べることができる: あるK-理論類 $\mathrm{Ind}D \in K_0(C^*(V,\mathcal{F}))$ があって,

$$< \tau, \mathrm{Ind}D >= \frac{1}{2i\pi} gv(\mathcal{F})$$

である. 実は, $\mathrm{Ind}D$ は V 上のロンジチューディナル Dirac 作用素の指数になる.

さて, PL 葉層の場合を考えよう. PL 葉層に対して Godbillon-Vey 不変量を定義することは可能であろうか? $g \in \mathrm{PL}(S^1)$ に対して, g の右微分 g'_d は well-defined な階段関数 $S^1 \to]0,+\infty[$ である. 従って, 我々は

$$\forall g \in \mathrm{PL}(S^1),\ l(g) = \log(g'_d)$$

と定義できる.

今, $l(g)$ は階段関数である. $l(g)$ の通常の微分 $dl(g)$ を考えたとしても得られる結果はゼロである. Ghys と Sergiescu は、我々が必要とする群コホモロジーのコサイクルが Bott-Thurston のコサイクルに対するものと同じ公式で与えられることを指摘している. ただし, ここでは $dl(g)$ は超関数の意味の微分と思う. つまり, $g \in \mathrm{PL}(S^1)$ と g の折れ点 $x \in S^1$ に対し, $\Delta l(g)(x) = l(g)(x_+) - l(g)(x_-)$ と書くことにすれば,

$$\forall g,h \in \mathrm{PL}(S^1),\ \bar{\omega}(g,h) = \sum_{x\in S^1} (l(h)\Delta l(gh) - l(gh)\Delta l(h))D(x)$$

である. $\bar{\omega}$ は $\mathrm{PL}(S^1)$ 上の群コホモロジーの 2 コサイクルである. M 上の全ホロノミー群 $\Gamma \subset \mathrm{PL}(S^1)$ を持つような PL 葉層 S^1-束 $(V,\mathcal{F})$ に対して,

$$\bar{gv}(\mathcal{F}) = \int_{S^1} \bar{\omega}[M]$$

とおく. $[M] \in H_2(\Gamma,\mathbf{Z})$ は M の基本類である. この不変量は実際に意味を持っていて, PL 葉層の分類にも役立つ. 我々はこれを Ghys-Sergiescu の離散 Godbillon-Vey 不変量と呼ぶ.

この論文の目的は次の二つの問いに肯定的に答えることである:

問 1: Ghys-Sergiescu の離散 Godbillon-Vey 不変量に対応するような興味深い巡回コサイクルは存在するか？

問 2: もし上のものがあるとして, そのコサイクルが Connes の指数定理のタイプの公式で, PL-Godbillon-Vey 不変量 $\bar{gv}$ と結び付けられるような具体例があるだろうか?

我々は, 第一の質問に, PL(S^1) と $\bar{\omega}$ に対してだけでなく, $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ や PL(S^1) を含むような Homeo(S^1) のかなり大きな部分群 — すなわち, クラス P の同相写像のなす部分群 — と坪井による一般化された Godbillon-Vey コサイクルに対して, 肯定的に答える. 我々は, Connes の定義と手法に基づいて, 次を示す:

定理. Γ を向きを保つクラス P の同相写像によって S^1 に作用する離散群とする. このとき, Godbillon-Vey 巡回コサイクルを一般化する $C(S^1) \rtimes \Gamma$ 上の 2-トレースが存在する.

とくに, もし $\Gamma \subset$ PL(S^1) ならば, $C(S^1) \rtimes \Gamma$ 上の 2-トレース $\bar{\tau}$ で Ghys と Sergiescu によって定義された離散 Godbillon-Vey 類に対応するものが得られる. 我々はこれを PL-Godbillon-Vey 巡回コサイクルと呼ぶ.

第二の問に答えるために, 我々ははじめに T^3 上の二つの簡単な Reeb 葉層 — なめらかな Reeb 葉層 $\mathcal{F}$ と PL-Reeb 葉層 $\overline{\mathcal{F}}$ — を研究する. それらは, C^0-同値である. これらの葉層はホロノミーが $\mathbf{Z}^2$ であるようなコンパクト葉をただ一つ持っている. また、

$$gv(\mathcal{F}) = 0, \ \bar{gv}(\overline{\mathcal{F}}) \neq 0$$

が知られている. 我々は次を示す:

定理. 1- $(T^3, \mathcal{F})$ をなめらかな Reeb 葉層, τ を Connes によって定義された Godbillon-Vey 巡回コサイクルとする. このとき, τ に誘導される K-理論写像 $K_0(C^*(T^3, \mathcal{F})) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ は自明である.

2- $(T^3, \overline{\mathcal{F}})$ を PL-Reeb 葉層, $\bar{\tau}$ を PL-Godbillon-Vey 巡回コサイクル, また $\mathfrak{e}$ を $K_0(C^*(T^3, \overline{\mathcal{F}})) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ の非自明な生成元とする. このとき,

$$< \bar{\tau}, \mathfrak{e} >= \frac{1}{2i\pi} \bar{gv}(\overline{\mathcal{F}}),$$

ここで, $\bar{gv}(\overline{\mathcal{F}})$ は Ghys-Sergiescu の離散 Godbillon-Vey 不変量とする.

PL 葉層の更なる例として, 我々は S^1 上の PL-$\mathbf{Z}^2$ 作用— PL(S^1) の $\mathbf{Z}^2$ に同型な部分群を生成する二つの可換な同相写像 $\varphi, \psi \in$ PL(S^1) の作用 — からくる葉層 S^1-束を考える. 我々は, このような作用は二つのカテゴリーに分類されることを示す:

命題. φ, ψ を S^1 上の PL-$\mathbf{Z}^2$-作用とし, $\mathcal{F}$ を結果としてできる T^3 上の PL-葉層とする. このとき次の二つの場合が起る:

1- 作用が周期点 (periodic point) を持つとき, $\mathcal{F}$ は有限個の Reeb 成分からなる T^3 の葉層である. $\mathcal{F}$ を PL-Reeb 葉層と呼ぶ. 離散 Godbillon-Vey 不変量 $\bar{gv}(\mathcal{F})$ は一般には 0 でない.

2- 作用が周期点を持たないとき, T^3 の平面葉からなる葉層 (foliation by planes), また $\bar{gv}(\mathcal{F}) = 0$ である. このような葉層は皆川の不変量 — the half total derivative $\Sigma^\omega \varphi = \Sigma^\omega \psi$ — と, φ と ψ の回転数によって, PL-共役に関して分類できる.

第二のカテゴリーの葉層は, 3 次元の非可換トーラスに C^0-同値であり, Pimsner と Voiculescu の結果により, 次を得る:

$$K_0(C^*(T^3, \mathcal{F})) = \mathbf{Z}^4, \quad K_1(C^*(T^3, \mathcal{F})) = \mathbf{Z}^4.$$

第一のカテゴリーに対し, 我々は $C^*(T^3, \mathcal{F})$ の K-理論を計算する. これは, T^2 の Reeb 葉層の K-理論についての Torpe の結果を拡張する.

[1], $[e]$ を, それぞれ T^2 上の自明な 1 次元複素束と非自明な 1 次元複素束が表す類 — $K(T^2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ の生成元 — とする. $[u]$ を $K_1(C(S^1)) = \mathbf{Z}$ の生成元 — 回転数が 1 であるような unitary $x \mapsto e^{2i\pi x}$ — とする.

我々は, 二つの連続して現れる T^3 上の Reeb 成分が互いに parallel でないとき, それらは "分離されている (separated)" と言うことにする.

定理. φ, ψ を S^1 上の固定点を持つ PL-$\mathbf{Z}^2$-作用, $(T^3, \mathcal{F})$ を対応する T^3 の PL-Reeb 葉層とする. N をホロノミー $\mathbf{Z}^2$ を持つコンパクト葉の数, M を分離されている Reeb 成分の数とする. このとき,

$$K_0(C^*(T^3, \mathcal{F})) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^N,$$

$$K_1(C^*(T^3, \mathcal{F})) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^M,$$

である. さらに, $p \geq N$ を非自明なホロノミーを持つコンパクト葉の数とし, j^k ($k \in \{1, ..., p\}$) を k 番目の葉の C*-代数から $C^*(T^3, \mathcal{F})$ への包含写像とする. このとき, K_0 の生成元は [1] とホロノミー $\mathbf{Z}^2$ を持つ葉に対応する $k \in \{1, ..., p\}$ に対する $j^k_*([e] - [1])$ たちである. K_1 の生成元は基本類と k 番目のコンパクト葉が属する分離されている Reeb 成分の "方向" を与える S^1 に対応する unitary $j^k_*([u])$ たちである.

さらに, 多くの layer を持つある PL-Reeb 葉層に対して, PL-Godbillon-Vey を計算することにより, 前述べた定理の一般化を得る:

定理. $(T^3, \mathcal{F})$ をホロノミー $\mathbf{Z}^2$ を持つ N 枚のコンパクト葉を含む T^3 上の PL-Reeb 葉層, $\bar{\tau}$ を PL-Godbillon-Vey 巡回コサイクル, また $\mathfrak{e}$ を基本 K_0 類, すなわち, $K_0(C^*(T^3, \mathcal{F})) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^N$ の非自明な生成元の和とする. このとき,

$$< \bar{\tau}, \mathfrak{e} > = \frac{1}{2i\pi} \bar{gv}(\mathcal{F}),$$

ここで, $\bar{gv}(\mathcal{F})$ は Ghys-Sergiescu の離散 Godbillon-Vey 不変量である.