論文の内容の要旨

論文題目　Inverse problem for a parabolic equation with space-periodic boundary conditions by Carleman estimate
(カーレマン評価による空間的な周期境界条件付きの放物型方程式に対する逆問題)

氏　　名　Jongsung Choi
(崔　鍾聲)

本論文では、空間的に周期境界条件付き放物型微分方程式において係数及び初期値を決定するという逆問題を考察した。つまり、領域 $\Omega = \prod_{j=1}^{n}(0, L_j)$, ただし $L_j > 0,\ 1 \le j \le n$、において,

$$(*) \begin{cases} u_t(t,x) = \Delta u(t,x) - p(x)u(t,x), \quad 0 < t < T,\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega, \\ u(0,x) = \mu(x), \quad x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_j^0} = u|_{\Gamma_j^1}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^1}, \quad 1 \le j \le n. \end{cases}$$

を考える。ここで、$j = 1, \cdots, n$ に対して Γ_j^0 と Γ_j^1 はそれぞれ

$$\partial\Omega \cap \{x_j = 0\}, \quad \partial\Omega \cap \{x_j = L_j\}$$

である。係数 $p = p(x)$ と初期値 $\mu = \mu(x)$ に対する許容集合を次のように定義する。

$$\mathcal{P} = \{p \in C^{1+\chi}(\overline{\Omega}) \mid p|_{\Gamma_j^0} = p|_{\Gamma_j^1},\ \left.\frac{\partial p}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^0} = \left.\frac{\partial p}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^1},$$
$$1 \le j \le n,\ \|p\|_{C^{1+\chi}(\overline{\Omega})} \le M\},$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} = \{\mu \in C^{3+\chi}(\overline{\Omega}) \mid \ & \mu|_{\Gamma_j^0} = \mu|_{\Gamma_j^1},\ \left.\frac{\partial \mu}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^0} = \left.\frac{\partial \mu}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^1}, \\
& \Delta\mu|_{\Gamma_j^0} = \Delta\mu|_{\Gamma_j^1},\ \left.\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta\mu)\right|_{\Gamma_j^0} = \left.\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta\mu)\right|_{\Gamma_j^1},\ 1 \le j \le n, \\
& \mu \ge r_0 > 0 \text{ on } \overline{\Omega},\quad \|\mu\|_{C^{3+\chi}(\overline{\Omega})} \le M\}.
\end{aligned}
$$

ここで、$C^{1+\chi}(\overline{\Omega})$ と $C^{3+\chi}(\overline{\Omega})$ は Hölder 空間を表わし、M と r_0 は定数である。$(p,\mu) \in \mathcal{P} \times \mathcal{A}$ のとき、$(*)$ の解を $u(p,\mu) = u(p,\mu)(t,x)$ と書く。θ は $(0,T)$ の中で固定されているとする。

我々の逆問題は観測データ $u(p,\mu)|_{(0,T)\times\omega}$ と $u(p,\mu)(\theta,x),\ x \in \Omega$ より p と μ を決定する問題である。本論文の目的はこのような逆問題に対して条件付き安定性を与えることにある。

２節では、半群理論を用いて順問題 $(*)$ が適切であることを示す。

３節では、Frusikov と Imanuvilov の方法に沿って、空間的に周期条件を持つ関数に対する Carleman 評価を与える。

４節の主要結果の証明の核心は、Bukhgeim と Klibanov による方法と３節で得られた Carleman 評価の結合である。

本論文の主要結果は次である。

ω は Γ_j^i $(i = 0,1,\ j = 1,\cdots,n)$ の境界を含む固定された部分領域であり、$\theta \in (0,T)$ も固定されていると仮定する。そのとき、以下を満たす定数 $C = C(M,\Omega,T,\theta,\omega) > 0$ が存在する：もし $p,q \in \mathcal{P}$ と $\mu,\nu \in \mathcal{A}$ ならば、

$$
\begin{aligned}
&\|p-q\|_{L^2(\Omega)} \\
\le& C\left(\|u(p,\mu)-u(q,\nu)\|_{H^1(0,T;L^2(\omega))} + \|(u(p,\mu)-u(q,\nu))(\theta,\cdot)\|_{H^2(\Omega)}\right)
\end{aligned}
$$

かつ、

$$
\begin{aligned}
&\|\mu-\nu\|_{L^2(\Omega)} \\
\le& C\left|\frac{1}{\log(\|u(p,\mu)-u(q,\nu)\|_{H^1(0,T;L^2(\omega))} + \|(u(p,\mu)-u(q,\nu))(\theta,\cdot)\|_{H^2(\Omega)})}\right|
\end{aligned}
$$

が成り立つ。