論文審査の結果の要旨

氏名　Jongsung Choi
崔　鍾聲

本論文では、周期境界条件付き放物型微分方程式において係数及び初期値を決定するという逆問題を考察した。つまり、区間の直積 $(0, L_j)$, $j = 1, ..., n$ で表現される領域 Ω において、空間変数に依存する熱拡散項をもつ熱方程式の初期値・周期境界値問題を考えた：

$$
\begin{aligned}
&u_t(t,x) = \Delta u(t,x) - p(x)u(t,x), \quad 0 < t < T,\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega, \\
&u(0,x) = \mu(x), \quad x \in \Omega, \\
&u|_{\Gamma_j^0} = u|_{\Gamma_j^1}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^1}, \quad 1 \le j \le n.
\end{aligned}
$$

を考える。ここで、$j = 1, \cdots, n$ に対して Γ_j^0 と Γ_j^1 はそれぞれ

$$
\partial\Omega \cap \{x_j = 0\}, \quad \partial\Omega \cap \{x_j = L_j\}
$$

である。

係数 $p(x)$ ならびに初期値 $\mu(x)$ が与えられた場合に上を満たす解 $u(t,x)$ を求める問題は順問題とよばれ、伝統的に研究され尽くされ、解の存在や一意性や時間が十分経過したときの漸近挙動などに関して多くの結果が知られている。その一方で係数や初期値が未知のときに、それらを解に関する過剰決定的なデータで決定しようとする問題は逆問題とよばれ、媒体内部の物理定数の同定や過去の温度分布の決定に関わる問題として、数理工学上から重要な問題である。

論文提出者の Jongsung Choi は、本論文において、次のような逆問題を考察した。すなわち、ω を領域 Ω に含まれる部分領域で測度はいくらでも小さくできるが後述するようなある条件を満たすものとする。θ を 0 と T の間の時刻として勝手に固定する。そのとき観測データ $u(p,\mu)|_{(0,T)\times\omega}$ と $u(p,\mu)(\theta, x)$, $x \in \Omega$ より p と μ を決定するという逆問題である。本論文においてこのような逆問題に対して数学解析を行い、主要結果として条件付き安定性を与えた。

主要結果を述べるために係数 $p = p(x)$ と初期値 $\mu = \mu(x)$ に対する許容集合を次のように定義した。

$$P = \{p \in C^{1+\chi}(\overline{\Omega}) \mid p|_{\Gamma_j^0} = p|_{\Gamma_j^1}, \left.\frac{\partial p}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^0} = \left.\frac{\partial p}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^1},$$
$$1 \le j \le n,\ \|p\|_{C^{1+\chi}(\overline{\Omega})} \le M\},$$

$$A = \{\mu \in C^{3+\chi}(\overline{\Omega}) \mid \mu|_{\Gamma_j^0} = \mu|_{\Gamma_j^1}, \left.\frac{\partial \mu}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^0} = \left.\frac{\partial \mu}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^1},$$
$$\Delta\mu|_{\Gamma_j^0} = \Delta\mu|_{\Gamma_j^1},\ \left.\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta\mu)\right|_{\Gamma_j^0} = \left.\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta\mu)\right|_{\Gamma_j^1},\ 1 \le j \le n,$$
$$\mu \ge r_0 > 0 \text{ on } \overline{\Omega},\quad \|\mu\|_{C^{3+\chi}(\overline{\Omega})} \le M\}.$$

ここで、$C^{1+\chi}(\overline{\Omega})$ と $C^{3+\chi}(\overline{\Omega})$ は Hölder 空間を表わし、M と r_0 は任意に固定した定数である。$(p,\mu) \in P \times A$ のとき、初期値・境界値問題の解を $u(p,\mu) = u(p,\mu)(t,x)$ と書く。

このとき、本論文の主要結果として以下を証明した。

ω は Γ_j^i $(i = 0, 1,\ j = 1, \cdots, n)$ の境界を含む固定された部分領域であり、$\theta \in (0,T)$ も固定されていると仮定する。そのとき、以下を満たす定数 $C = C(M, \Omega, T, \theta, \omega) > 0$ が存在する：もし $p, q \in P$ および $\mu, \nu \in A$ ならば、

$$\|p - q\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\le C\left(\|u(p,\mu) - u(q,\nu)\|_{H^1(0,T;L^2(\omega))} + \|(u(p,\mu) - u(q,\nu))(\theta,\cdot)\|_{H^2(\Omega)}\right)$$

かつ、

$$\|\mu - \nu\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\le C\left|\frac{1}{\log(\|u(p,\mu) - u(q,\nu)\|_{H^1(0,T;L^2(\omega))} + \|(u(p,\mu) - u(q,\nu))(\theta,\cdot)\|_{H^2(\Omega)})}\right|$$

が成り立つ。

考察した逆問題は前述したように数理的に意義のあるものであり、さらに証明に要する手法は空間的に周期条件を持つ関数に対する Carleman 評価に基づく方法であり、一意接続性などとも関連しそれ自体興味あるものである。よって、論文提出者 Jongsung Choi は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。