論文の内容の要旨

論文題目: The behavior of the principal distributions
(主分布の振る舞い)

氏　　名: 安藤　直也

S を $\mathbf{R}^3$ の滑らかな曲面とし $\mathrm{Umb}(S)$ で S の臍点全体からなる集合とし, また $\mathrm{Reg}(S) := S \setminus \mathrm{Umb}(S)$ とおく. もし $\mathrm{Reg}(S) \neq \emptyset$ ならば $\mathrm{Reg}(S)$ 上の一次元連続分布で $\mathrm{Reg}(S)$ の各点に主方向を与えるものが存在する. そのような分布を <u>S 上の主分布</u> という. $\mathrm{Reg}(S)$ の点の周りでの主分布の振る舞いを描写するのは容易である: その点で零ならざるベクトル場を用いて主分布を (局所的に) 表すことができる. 一方臍点の周りでの主分布の振る舞いは非常に複雑な場合が有り, また一般にはいかなるベクトル場を用いても主分布を表すことができない場合がある. 臍点の周りでの主分布の振る舞いはしばしば興味の対象とされ, かつては Cayley や Darboux らによって主分布の振る舞いを把握することが試みられた ([1]). p_0 を孤立臍点とするとき, 二つの主分布の共通の孤立特異点である p_0 の指数は互いに等しいが, この共通の数を <u>S 上での p_0 の指数</u> といい $\mathrm{ind}_{p_0}(S)$ で表す. S が平均曲率一定曲面であれば $\mathrm{Umb}(S)$ の内点ならざる点はすべて孤立臍点でありかつその指数は負である ([3, pp. 139]). より一般に S が特別な Weingarten 曲面であれば同様の結論が得られる ([2]).

本論文の目的は実解析的な曲面上の孤立臍点の周りでの主分布の振る舞いを調べることである. そのためにまず第 1 部において二変数同次多項式の graph 上の主分布の振る舞いを調べる. 次数 k の二変数同次多

項式全体からなる集合を $\mathcal{P}^k$ で表し, $\mathcal{P}^k$ の元でその graph 上 $\mathbf{R}^3$ の原点 o が孤立臍点であるもの全体からなる集合を $\mathcal{P}^k_o$ で表す. 第1章において $g \in \mathcal{P}^k_o$ の graph G_g 上の o の周りでの主分布の振る舞いを調べ, 特に $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_g) \in \{1-k/2+i\}_{i=0}^{[k/2]}$ を示し, また3以上の任意の自然数 k および $\{1-k/2+i\}_{i=0}^{[k/2]}$ の任意の元 l に対して $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_g) = l$ を満たす $g \in \mathcal{P}^k_o$ が存在することを示す. 第2章では G_g の o 以外の臍点の存在に関連させて o の周りでの主分布の振る舞いをさらに調べる. 第3章では $g \in \mathcal{P}^3_o$ に対し $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_g)$ と $\mathrm{Umb}(\mathsf{G}_g)$ の関係を詳細に調べる. これらの研究においては特に “位置ベクトル場” $x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ が主方向に含まれるような点の近傍で主分布の振る舞いを位置ベクトル場の振る舞いと比較する. こうした点を見つけることができるのは同次多項式 $g \in \mathcal{P}^k$ に対する関係式 $kg = x\dfrac{\partial g}{\partial x} + y\dfrac{\partial g}{\partial y}$ のおかげである. より一般の曲面上の孤立臍点の周りでの主分布の振る舞いを調べるための方法として次の (i), (ii) が考えられ, そこでまず $g \in \mathcal{P}^k_o$ の graph 上で (i)(および (ii)) を第2章 (および第4章) で実践する:

(i) g の勾配ベクトル場が主方向に含まれる点の近傍で主分布の振る舞いを勾配ベクトル場の振る舞いと比較する;

(ii) o を端点とする曲線に沿って o に近づいていったときの主分布の極限を調べる.

また第4章では o 以外の孤立臍点および G_g に対する一点コンパクト化によって付け加えられた点の周りでの主分布の振る舞いを調べる.

第2部では第1部の研究に基づいて実解析的な曲面上の孤立臍点の周りでの主分布の振る舞いを調べる. l を自然数とし, F を $\mathbf{R}^2$ における $(0,0)$ の連結な近傍上定義された実解析的関数で $\dfrac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m \partial y^n}(0,0) = 0$ が $0 \leqq m+n < l$ なる非負整数 m, n に対し成り立つものとし, F のような関数全体からなる集合を $\mathcal{A}^{(l)}_o$ で表す. また $\mathcal{A}^{(2)}_o$ の元でその graph 上 o が孤立臍点であるもの全体からなる集合を $\mathcal{A}^2_o$ で表す. $\mathcal{A}^{(2)}_o$ の元 F を, その graph G_F の各点で F の勾配ベクトル場が主方向に含まれるという性質を持ったものとするとき, 第5章においてこのような F の graph G_F 上の o の周りでの主分布の振る舞いを調べ, 特に F が $\mathcal{A}^2_o$ の元ならば G_F は回転面の一部であることを示す. このとき $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_F) = 1$ が成り立つ. さて各 $F \in \mathcal{A}^2_o$ に対し $\mathcal{A}^{(3)}_o$ の元 f_F で G_{F-f_F} が全臍的であるものが存在し, またある k_F 次同次多項式 g_F があって $f_F - g_F \in \mathcal{A}^{(k_F+1)}_o$ を満たす. $\mathcal{A}^2_o$ の元 F で $g_F \in \mathcal{P}^{k_F}_o$ を満たすもの全体からなる集合を $\mathcal{A}^2_{oo}$ で表す. 第6章では $F \in \mathcal{A}^2_{oo}$ の graph G_F 上の o の周りでの主分布の振る舞いを調べ, 特に $\mathrm{ind}_o\left(\mathsf{G}_{g_F}\right) \leqq \mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_F) \leqq 1$ を示す. また $F \in \mathcal{A}^{(2)}_o$ の graph が全

臍的ならざる特別な Weingarten 曲面でありかつ o を臍点として有するとき, $F \in \mathcal{A}^2_{oo}$ でありかつ $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_F) = \mathrm{ind}_o\left(\mathsf{G}_{g_F}\right) = 1 - k_F/2$ であることを示す.

一般に, 孤立臍点 p_0 を有する滑らかな曲面 S に対し $\mathrm{ind}_{p_0}(S) \leqq 1$ という不等式が期待されてきた. この予想に関連して二つの予想が知られている: Carathéodory 予想と Loewner 予想である. Carathéodory 予想とは compact かつ強凸なる曲面には二つ以上臍点が存在するのではないかというものである. もし $\mathrm{ind}_{p_0}(S) \leqq 1$ ならば compact, 向き付け可能で genus 0 の曲面には二つ以上臍点が存在することが Hopf-Poincaré の定理を用いてわかり, compact かつ強凸なる曲面は向き付け可能かつ genus 0 なので結局 Carathéodory 予想を肯定的に解決することができる. F を二実変数の実数値をとる滑らかな関数とし, $\partial_{\bar{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ とおく. このとき自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対する Loewner 予想とはベクトル場 $\mathrm{Re}(\partial^n_{\bar{z}}F)\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathrm{Im}(\partial^n_{\bar{z}}F)\dfrac{\partial}{\partial y}$ の孤立零点の指数は n 以下なのではないかというものである ([4], [6]). $n = 2$ に対する Loewner 予想は上に述べた予想 $\mathrm{ind}_{p_0}(S) \leqq 1$ と同値である ([5]). 第 6 章では S が実解析的であるときに $\mathrm{ind}_{p_0}(S) \leqq 1$ に対する十分条件を与える.

参考文献

[1] C.Gutierrez and J.Sotomayor, Structurally stable configurations of lines of principal curvature, Astérisque 98-99(1982), 195-215.

[2] P.Hartman and A.Wintner, Umbilical points and W-surfaces, Amer. J. Math., 76(1954) 502-508.

[3] H.Hopf, Lectures on differential geometry in the large, Lecture Notes in Math., vol.1000, Springer-Verlag.

[4] T.Klotz, On Bol's proof of Carathéodory's conjecture, Comm. Pure Appl. Math., 12(1959) 277-311.

[5] B.Smyth and F.Xavier, Real solvability of the equation $\partial^2_{\bar{z}}\omega = \rho g$ and the topology of isolated umbilics, J. Geom. Anal., 8(1998), 655-671.

[6] C.J.Titus, A proof of a conjecture of Loewner and of the conjecture of Carathéodory on umbilic points, Acta Math., 131(1973), 43-77.