論文審査の結果の要旨

安藤　直也

S を $\mathbf{R}^3$ の滑らかな曲面とし $umb(S)$ で S の臍点全体からなる集合とし，また $reg(S) := S \setminus umb(S)$ とおく．もし $reg(S) \neq \emptyset$ ならば $reg(S)$ 上の互いに直行する２つの一次元連続分布で $reg(S)$ の各点で２つの主方向を与えるものが存在する．そのような分布を S 上の主分布という．一般に臍点は主分布の特異点である。 p_0 を孤立臍点とするとき，二つの主分布の共通の孤立特異点になり、p_0 における指数は互いに等しくなる。この共通の数を S 上での p_0 の指数といい $ind_{p_0}(S)$ で表す．S が平均曲率一定曲面であれば $umb(S)$ の内点ならざる点はすべて孤立臍点でありかつその指数は負である (ホップの定理)．一般の曲面 S 上の任意の孤立臍点 p_0 について

$$ind_{p_0}(S) \leq 1 \tag{1}$$

となることが、予想されてきたがいまだ未解決である。この予想が肯定的であれば古典幾何で有名な「コンパクトな強凸曲面には２つ以上の臍点がある」というカラテオドリ予想が証明できることになる。

本論文で申請者は実解析的な曲面上の孤立臍点の周りでの主分布の振る舞いを研究し、generic な曲面にたいしては上記の予想１が成り立つことをしめし、あわせて一般の曲面の場合に１が成り立つための十分条件を与えた。

本論文は２部から成り立っている。まず第１部において二変数同次多項式のグラフ上の主分布の振る舞いを研究した．次数 k の二変数同次多項式全体からなる集合を $\mathcal{P}^k$ で表し，$\mathcal{P}^k$ の元でその graph 上 $\mathbf{R}^3$ の原点 o が孤立臍点であるもの全体からなる集合を $\mathcal{P}^k_o$ で表す．第１章では $g \in \mathcal{P}^k_o$ のグラフ G_g 上の o の周りでの主分布の振る舞いを調べ，特に $ind_o(\mathsf{G}_g) \in \{1 - k/2 + i\}_{i=0}^{[k/2]}$ を示し，また３以上の任意の自然数 k および $\{1 - k/2 + i\}_{i=0}^{[k/2]}$ の任意の元 l に対して $ind_o(\mathsf{G}_g) = l$ を満たす $g \in \mathcal{P}^k_o$ が存在することを示す．第２章では G_g の o 以外の臍点の存在に関連させて o の周りでの主分布の振る舞いをさらに調べる．第３章では $g \in \mathcal{P}^3_o$ に対し $ind_o(\mathsf{G}_g)$ と $umb(\mathsf{G}_g)$ の関係を詳細に調べる．これらの研究においては特に "位置ベクトル場" $x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ が主方向に含まれるような点の近傍で主分布の振る舞いを位置ベクトル場の振る舞いと比較するという独創的な視点を提案した．

第２部では第１部の研究に基づいて実解析的な曲面上の孤立臍点の周りでの主分布の振る舞いを調べる．l を自然数とし，F を $\mathbf{R}^2$ における $(0,0)$ の連結な近傍上定義された実解析的関数で $\dfrac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m \partial y^n}(0,0) = 0$ が $0 \leqq m + n < l$ なる非負整数 m, n に対し成り立つものとし，F のような関数全体からなる集合を $\mathcal{A}^{(l)}_o$ で表す．また $\mathcal{A}^{(2)}_o$ の元でそのグラフ上 o が孤立臍点であるもの全

体からなる集合を $\mathcal{A}_o^2$ で表す. $\mathcal{A}_o^{(2)}$ の元 F を, そのグラフ G_F の各点で F の勾配ベクトル場が主方向に含まれるという性質を持ったものとするとき, 第5章においてこのような F のグラフ G_F 上の o の周りでの主分布の振る舞いを調べ, 特に F が $\mathcal{A}_o^2$ の元ならば G_F は回転面の一部であることを示す. このとき $ind_o(\mathsf{G}_F) = 1$ が成り立つ. さて各 $F \in \mathcal{A}_o^2$ に対し $\mathcal{A}_o^{(3)}$ の元 f_F で G_{F-f_F} が全臍的であるものが存在し, またある k_F 次同次多項式 g_F があって $f_F - g_F \in \mathcal{A}_o^{(k_F+1)}$ を満たす. $\mathcal{A}_o^2$ の元 F で $g_F \in \mathcal{P}_o^{k_F}$ を満たすもの全体からなる集合を $\mathcal{A}_{oo}^2$ で表す. 第6章では $F \in \mathcal{A}_{oo}^2$ の graph G_F 上の o の周りでの主分布の振る舞いを調べ, 特に $ind_o(\mathsf{G}_{g_F}) \leqq ind_o(\mathsf{G}_F) \leqq 1$ を示す. また $F \in \mathcal{A}_o^{(2)}$ の graph が全臍的ならざる特別な Weingarten 曲面でありかつ o を臍点として有するとき, $F \in \mathcal{A}_{oo}^2$ でありかつ $ind_o(\mathsf{G}_F) = ind_o(\mathsf{G}_{g_F}) = 1 - k_F/2$ であることを示す.

部分多様体の幾何学では、次元の低い曲面の場合がむしろ難しく興味ある問題がまだ未解決である。多くの場合に臍点での解析に帰着されるのだが、それを解く手段がないのが現状である。そのような中で、主分布の指数を視点として臍点に関する興味ある優れた成果を申請者は本論文で示している。よって論文申請者　安藤直也　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格あると認める。