論文内容の要旨

論文題名　**Threshold Competition Dynamics**

(閾値をもつ競合系のダイナミクス)

氏名　　**井古田 亮**

本研究の目的は, 競争関係にある生物種の棲み分け現象に対して, 新たにモデル Threshold Competition Dynamics (TCD) を提案し, それと競合-拡散系モデルとの関連を調べることである. この TCD には, 生物種の棲み分け境界が鮮明に現れるという特徴があり, 棲み分けパターンの研究に有効であることが期待される. 本論文では特に, 競争種の種数が 2 の場合を中心に扱った.

数理生態学では, 競争生物種の空間的棲み分け現象のモデルの 1 つとして, 競合-拡散系が用いられてきた. 変数 $u_i(t,x)$ を時刻 $t>0$, 位置 $x\in\Omega$ (Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域) における i 番目の競争種 U_i $(i=1,2,\dots,n)$ の個体群密度とすると, 競合-拡散系は以下のように表される:

$$(1)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = d_i\Delta u_i + (r_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j)u_i \quad (i=1,2,\dots,n),\quad x\in\Omega,\ \ t>0.$$

ここで d_i は拡散係数, r_i は成長率, a_{ii} は種内競争係数, そして a_{ij} $(i\neq j)$ は U_i と U_j の間の種間競争係数である. これらの定数はすべて正であるとし, 次の初期・境界条件を課す:

$$(2)\qquad u_i(0,x) = u_{i0}(x) \geq 0 \qquad (i=1,2,\dots,n)\quad x\in\Omega,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0 \qquad (i=1,2,\dots,n)\quad x\in\partial\Omega.$$

ここで ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線, u_{i0} は非負値関数である. それぞれの個体群は拡散によって移動する.

生態学的見地から, 競争種 U_i $(i=1,2,\dots,n)$ の空間的棲み分けの振る舞いを理解することは重要である. このとき, 種間競争係数 a_{ij} $(i\neq j)$ は比較的大きい値をとると考えるのが自然である. そこでパラメータ k を導入して, (1) を以下のように書き換える:

$$(4)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = d_i\Delta u_i + (r_i - a_{ii}u_i)u_i - k\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} b_{ij}u_iu_j \qquad (i=1,2,\dots,n)\quad x\in\Omega,\ \ t>0.$$

式 (4) において k を大きくして行くと, u_i のグラフの形は定性的に保たれたまま, 各 U_i の棲み分け境界が鮮明になって行くことが, 数値計算によりわかる. よって, 何らかの意味で $k \uparrow \infty$ の極限を考えれば, (4) の解の棲み分け境界面を定めることができるという期待がもてる.

以上を考慮して, Threshold Competition Dynamics の方法を提案する:

(Threshold Competition Dynamics)

Step 1: 変数 $x \in \Omega$ の関数 $u_i(t, \cdot)$ が時刻 t において与えられたものとしてこれを初期値とし, 以下の $v_i(s, x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ についての初期-境界値問題を計算する:

$$\frac{\partial v_i}{\partial s} = d_i \Delta v_i + (r_i - a_{ii} v_i) v_i, \qquad x \in \Omega, \quad 0 < s \le \tau, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad 0 < s \le \tau, \tag{6}$$

$$v_i(0, x) = u_i(t, x) \ge 0, \qquad x \in \Omega. \tag{7}$$

ここで τ は任意の正定数である. 方程式 (5) はそれぞれ v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の独立した方程式であり, Fisher 方程式と呼ばれる.

Step 2: 変数変換 $\theta = kt$ を施し, Step 1 で得られた $v_i(\tau, x) \ge 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を初期値として, 以下の $z_i(\theta; x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ についての初期値問題を各点 $x \in \Omega$ において計算する:

$$\frac{dz_i}{d\theta} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} b_{ij} z_i z_j \qquad x \in \Omega, \quad 0 < \theta < \infty, \tag{8}$$

$$z_i(0; x) = v_i(\tau, x) \qquad x \in \Omega. \tag{9}$$

このとき $z_i(\theta; x)$ の極限値 $z_{i\infty}(x) \ge 0$ が存在する:

$$\lim_{\theta \to \infty} z_i(\theta; x) = z_{i\infty}(x).$$

Step 3: $u_i(t + \tau, x) = z_{i\infty}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ と代入する.

以上の Step1,2, 及び 3 を繰り返すことにより, $u_i(t + j\tau, x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ が順次求まる.

この方法の特徴は Step 2 にある: パラメータ k が十分大きいとき, 時間変数 t で見ると, 解 $z_i(\theta; x) = z_i(kt; x)$ は瞬間的に極限 $z_{i\infty}(x)$ に漸近する. 従って, 複雑な操作をすることなく棲み分け境界を定めることができ, パターンダイナミクスを捉える上で有効である.

TCD によって棲み分け界面を定められることを, 2 変数の場合を例として見てみよう. 方程式 (8) は

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{d\theta} = -b_{12} z_1 z_2, \\[2mm] \dfrac{dz_2}{d\theta} = -b_{21} z_2 z_1 \end{cases}$$

となる. その結果, 極限は次の 3 通りに分類される:

$$\begin{cases} (z_{1\infty}(x), z_{2\infty}(x)) = (v_1(\tau, x) - (b_{12}/b_{21}) v_2(\tau, x), 0), & \text{if } b_{21} v_1(\tau, x) > b_{12} v_2(\tau, x), \\ (z_{1\infty}(x), z_{2\infty}(x)) = (0, 0), & \text{if } b_{21} v_1(\tau, x) = b_{12} v_2(\tau, x), \\ (z_{1\infty}(x), z_{2\infty}(x)) = (0, v_2(\tau, x) - (b_{21}/b_{12}) v_1(\tau, x)), & \text{if } b_{21} v_1(\tau, x) < b_{12} v_2(\tau, x). \end{cases}$$

よって $z_{1\infty}(x)$ と $z_{2\infty}(x)$, すなわち $u_1(t+\tau,x)$ と $u_2(t+\tau,x)$ は完全に空間排他的に棲み分けることがわかる.

他方, 2 変数の場合には, 特異極限を用いて棲み分け境界を定めることもできる. このことを以下に見てみよう. 方程式 (4) は, 適当に変数変換を行うことにより, α を正定数として,

$$
\begin{aligned}
&(10) \qquad u_t = d_1\Delta u + f(u)u - kuv, && x\in\Omega,\ t>0,\\
&(11) \qquad v_t = d_2\Delta v + g(v)v - k\alpha uv, && x\in\Omega,\ t>0,\\
&(12) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, && x\in\partial\Omega,\ t>0,\\
&(13) \qquad u(0,x) = u_0(x)\ge 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \ge 0 && x\in\Omega,
\end{aligned}
$$

と書き換えられる. また, 次の方程式を導入する:

$$
\begin{aligned}
&(14) \qquad w_t = \nabla(d(w)\nabla w) + h(w), && x\in\Omega,\ t>0,\\
&(15) \qquad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, && x\in\partial\Omega,\ t>0,\\
&(16) \qquad w(0,x) = w_0(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u_0(x) - \frac{v_0(x)}{\alpha}, && x\in\Omega.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
d(s) = \begin{cases} d_1 & (s>0),\\ d_2 & (s<0),\end{cases} \qquad h(s) = \begin{cases} f(s)s & (s>0),\\ g(-\alpha s)s & (s<0),\end{cases}
$$

である. 方程式 (14)–(16) の解を w とおき, 方程式 (10)–(13) の解を $(u^{(k)}, v^{(k)})$ とおいて, $k\uparrow\infty$ の極限をとると, $u^{(k)}\to[w]^+$, $v^{(k)}\to\alpha[w]^-$ となることが知られている (ここで, $[w]^+=\max\{w,0\}$, $[w]^-=\max\{-w,0\}$ である). すなわち, 関数 w の零等高線を棲み分け境界とすることができるのである.

方程式(14)–(16) の弱解は以下のようにして定義される:

定義 . 初期値 w_0 は $L^\infty(\Omega)$ に属するとする. また, $Q_T=\Omega\times(0,T)$ とおく. 任意の試験関数 $\phi\in C^1(\bar{Q}_T)$ に対し, 関数 w が

$$
\begin{aligned}
&(17) \qquad w\in L^\infty(\Omega\times(0,T))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap C([0,T];L^2(\Omega)),\\
&(18) \qquad \int_\Omega w(T)\phi(T) - \iint_{Q_T}\{w\phi_t - d(w)\nabla w\nabla\phi + h(w)\phi\} = \int_\Omega w_0\phi(0),
\end{aligned}
$$

を満たすとき, w を弱解とよぶ.

ここで, 主要結果を述べるための準備として, いくつかの記号を導入する. 方程式 (10), (11) を, 初期条件 $u(0,x)=u_0(x)$, $v(0,x)=v_0(x)$ の下で解いたものをそれぞれ $\mathcal{H}^u(t)u_0$, $\mathcal{H}^v(t)v_0$ と書くことにする.

定義 . 非負実数 t に対し, 作用素 $\mathcal{K}(t)$ を定義する:

$$
(19) \qquad \mathcal{K}(t)z_0 \stackrel{def}{=} \mathcal{H}^u(t)[z_0]^+ - \frac{1}{\alpha}\mathcal{H}^v(t)(\alpha[z_0]^-).
$$

TCD を $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$ に対し (但し, Ω 上ほとんど至るところ $u_0 v_0 = 0$) 適用すると, それぞれ, $[\mathcal{K}(\tau)(u_0 - v_0/\alpha)]^+$, $\alpha[\mathcal{K}(\tau)(u_0 - v_0/\alpha)]^-$ となることに注意する. すなわち, $\mathcal{K}(t)$ は TCD を表現したものと言える. 次に, 関数 w_0 は $L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ の元であるとし,

$$(20) \qquad \hat{w}^{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{K}(t - t_m) \circ \mathcal{K}(T/n)^m w_0, \qquad t_m < t \leq t_{m+1} \qquad (m = 0, 1, \cdots, n-1).$$

と定義する. ここで $\hat{w}^{(n)} \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ となることに注意する.

本論文で次の結果を得た.

定理 A. 関数 $\hat{w}^{(n)}$ は $n \to \infty$ のとき, 方程式(14)-(16) の弱解に $C([0,T]; L^2(\Omega))$ において収束する.

定理 B. 関数 w_0 は $L^\infty(\Omega)$ の元とする. 関数 u_0, v_0 を $u_0 = [w_0]^+$, $v_0 = \alpha[w_0]^-$ とおく. 関数 $w(t)$ を(14)-(16) の弱解とする. $[w_0]^+$, $[w_0]^-$ に対して, ある条件を満たすような関数の近似列が存在するものとする.

もし $d_1 = d_2$ であるならば, n に依存しない正定数が存在して

$$(21) \qquad \|\mathcal{K}(T/n)^n w_0 - w(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1/n)^{1/2},$$

となる.

定理 C. 定理 B と同じ条件が成り立つものとする. このとき n に無関係な正定数 C' が存在して

$$(22) \qquad \|\mathcal{K}(T/n)^n w_0 - w(T)\|_{L^1(\Omega)} \leq C'(1/n)$$

が成立する.

すなわち, TCD は (14)–(16) に収束する. 競合-拡散系が (14)–(16) によって近似されることから, TCD もまた競合-拡散系を近似すると言える.

本論文では 2 変数の場合に限って, さらに,

1. 十分大きな k に対する競合-拡散系
2. 自由境界問題 (14)–(16)
3. Threshold Competition Dynamics

のそれぞれに対して, 数値計算を行い比較した. その結果, $k \uparrow \infty$ の極限問題によって定義される界面を数値的に捉えるには, これらのうちで TCD が最も効率のよい方法であることが明らかとなった.