論文審査の結果の要旨

氏名 落合 理

落合君は本論文において, 肥田表現に対し, 双対指数写像が p 進連続に補間できることを示した. そしてこのことを使って肥田表現に対する 2 変数 p 進 L 関数の新しい構成を与えた.

この論文の背景は次のとおりである. f を, $\mathbb{Q}_p$ 係数の正規化された重さ k, 指標 ϵ の保型形式で, すべての Hecke 作用素の同時固有ベクトルであるものとする. このような f に対し, 絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の p 進表現 $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Z}_p)$ で, ほとんどすべての素数 q で不分岐かつ $\det(1 - Fr_q t) = 1 - a_q(f)t + \epsilon(q)q^{k-1}t^2$ をみたすものが構成されている. $\Lambda_d = \mathbb{Z}_p[[1+p\mathbb{Z}_p]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$ を岩澤環とし, 整数 k と, $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環 O への位数有限な指標 $\eta : 1+p\mathbb{Z}_p \to O^\times$ に対し $|_{k,\eta} : \Lambda_d \to O$ を $k-2$ 乗写像 $1+p\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p^\times$ と η の積が定める環の準同型とする. $f \in \Lambda_d[[q]]$ を, 各 $k \geq 2, \eta$ に対し $f|_{k,\eta} \in O[[q]]$ が重さ k の保型形式で, すべての Hecke 作用素の同時固有ベクトルであるようなものとする. このような f を以下 Λ-進形式とよぶ. 肥田は Λ-進形式 f に対し, 連続表現 $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\Lambda_d)$ で, 各 $k \geq 2, \eta$ に対し, $\rho_f|_{k,\eta} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(O)$ が, $\rho_{f|_{k,\eta}} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(O)$ を与えるようなものを構成した. この表現を以下肥田表現とよぶ. Greenberg-Stevens, 北川, 大田は, Λ-進形式 f に対し, 次のような性質をもつ 2 変数 p 進 L 関数 $L(f) \in \Lambda_{c,d}$ を構成した. ここで $\Lambda_{c,d} = \mathbb{Z}_p[[(1+p\mathbb{Z}_p)\times(1+p\mathbb{Z}_p)]] = \Lambda_c \hat{\otimes} \Lambda_d$ である. 整数 j, k と, $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環 O への位数有限な指標 $\eta_c : 1+p\mathbb{Z}_p \to O^\times, \eta_d : 1+p\mathbb{Z}_p \to O^\times$ に対し, 指標 $1+p\mathbb{Z}_p \to O^\times : a \mapsto a^{j-1}\eta_c(a), a \mapsto a^{k-2}\eta_d(a)$ が定める環の準同型を $\Lambda_{c,d} \to O$ による $L(f)$ の像を, $L(f|_{k,\eta_d}, \eta_c^{-1}, j)$ で表わすことにする. このとき $1 \leq j \leq k-1$ をみたす整数 j, k に対し, $L(f|_{k,\eta_d}, \eta_c^{-1}, j)$ を保型形式 $f|_{k,\eta_d}$ の p 進周期でわったものは, 代数的数であり, それは複素 L 関数 $L(f|_{k,\eta_d}, \eta_c^{-1}, s)$ の $s = j$ での値を保型形式 $f|_{k,\eta_d}$ の周期積分でわったものに簡単な因子をかけたものと等しい.

落合君は本論文で双対指数写像を p 進補間することにより, 2 変数 p 進 L 関数の新しい構成を与えている. この構成は, Beilinson-加藤により定義されたモジュラー曲線の K_2 の元がなす Euler 系を使うものであり, 岩澤主予想への応用が期待できるものである.

主結果をのべるためにいくつか準備をする. $T = \Lambda_d^2$ を肥田表現とする. 整数 $k \geq 2, t \geq 0$ に対し, $T_t^{(k)} = T \otimes_{\Lambda_d} \mathbb{Z}_p[(1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^{t+1}\mathbb{Z}_p)]$ を k 乗写像 $1+p\mathbb{Z}_p \to (1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^{t+1}\mathbb{Z}_p)$ に関するテンソル積とし, $T_t^{(k)*}$ をその双対表現, $V_t^{(k)} = T_t^{(k)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とする. p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 K の絶対 Galois 群 G_K の p 進表現 T に対し, $V = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とおき, $D_{dR}(V)$ を $B_{dR} \otimes V$ の $G_{\mathbb{Q}_p}$-不変部分とする. $H^1_f(K,T)$ を $H^1(K,T) \to H^1(K, B_{cris} \otimes T)$ の核とし, $\exp^* : H^1(K,T)/H^1_f(K,T) \to F^0 D_{dR}(V)$ を双対指数写像とする. 整数 $k \geq 2, j$ に対し, 加藤は, ノルムに関する逆極限の元 $(z_{s,t}^{(j,k)})_{s,t} \in \varprojlim_{s,t} H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^s}), T_t^{(k)*}(1-j))$ で, 次の性質をもつものを構成した. $1 \leq j \leq k-1$ とする. 各 s, t に対し, $\exp^*(z_{s,t}^{(j,k)})$ を保型形式 $f|_{k,\eta_d}$ の p 進周期でわったものは, 代数的数であり, それは複素 L 関数 $L(f|_{k,\eta_d}, \eta_c^{-1}, s)$ の $s = j$ での値を保型形式 $f|_{k,\eta_d}$ の周期積分でわったものに簡単な因子をかけたものと等しい.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

落合君は, 肥田表現 T に対し, 次の性質をみたす $\Lambda_{c,d}$-線型形式

$$\Omega^{(j,k)} : \varprojlim_{s,t} \frac{H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^s}), T_t^{(k)*}(1-j))}{H_f^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^s}), T_t^{(k)*}(1-j))} \to \Lambda_{c,d}$$

を構成した. $\Omega^{(j,k)}$ は単射で, かつ $\Lambda_{c,d}$ の高さ 1 の各素イデアルでは同型である. さらに, $\Omega^{(j,k)}$ を k 乗写像 $1+p\mathbb{Z}_p \to (1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^{t+1}\mathbb{Z}_p)$ がひきおこす環の準同型 $\Lambda_d \to \mathbb{Z}_p[(1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^{t+1}\mathbb{Z}_p)]$ によってテンソルしたものは, 簡単な修正ののち双対指数写像 $H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^s}), T_t^{(k)*}(1-j))/H_f^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^s}), T_t^{(k)*}(1-j)) \to F^0 D_{dR}(V)$ と一致する. この写像 $\Omega^{(j,k)}$ による $(z_{s,t}^{(j,k)})_{s,t} \in \varprojlim_{s,t} H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^s}), T_t^{(k)*}(1-j))$ の像は, 上で述べたことから 2 変数 p 進 L 関数 $L(f)$ を与えることがわかる.

証明の方針は次のとおりである. 肥田表現は, 階数 1 の部分表現 F^+T で, 商 T/F^+T が階数 1 の不分岐表現となるものをもつことが知られている. そこで, $\Omega^{(j,k)}$ を定義するには T のかわりに F^+T を考えれば十分であることがわかる. さらに階数 1 の表現 F^+T は比較的簡単な表現であるので, これはさらに Coleman 写像 $\varprojlim \mathbb{Z}_p(\zeta_{p^s})^\times \to \mathbb{Z}_p[[T]]$ を使って構成する.

本論文では, 肥田表現に対する 2 変数 p 進 L 関数の新しい構成が p 進 Hodge 理論を使った新しい方法で与えられている. またこの方法は岩澤主予想への応用も期待できるものである. よって論文提出者 落合 理 は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.