論文の内容の要旨

論文題目　Gibbs Measure with Hard-wall Potential from a View Point of Stochastic Partial Differential Equation with Reflection

（反射壁確率偏微分方程式の観点による剛体壁ポテンシャルを持つギブス分布）

氏　　名　乙部厳己

本論文は、反射壁を持つ放物型の確率偏微分方程式の解の定常分布となる Gibbs 分布について考察することを目的とする。放物型の確率偏微分方程式とは一般に、反応拡散方程式に対して白色雑音の摇動を受けた次の形のものをいう。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - f(x,t;u(x,t)) + \sigma(x,t;u(x,t))\dot{W}(x,t)$$

ここで f は外力項と呼ばれ、σ は拡散係数と呼ばれる。f に対して $U(x,t;z) := \int_0^z f(x,t;\xi)\,d\xi$ をポテンシャルと呼ぶ。これを $\nabla U = f$ と略記することもある。$\dot{W}$ は時空間の白色雑音を表わす。これは、直観的には時空間の各点で独立かつ正規分布をしている熱雑音である。

この種の方程式は種々の動機の下に様々な研究が行われてきた。たとえばランダムな媒質中を漂う弦のランダムな運動がこのような方程式で記述されるほか、統計力学的な観点からたとえば強磁性体のスピンのランダムな時間発展を記述する方程式としても知られている。その外にも構成的な場の量子論におけるゲージ理論に関連して現われることも知られている。これらの方程式はたとえ初期値が正で f が 0 の場合であっても、解は正負の両方の値をとりうることに注意する。

一方において、有限次元の確率微分方程式が記述する拡散現象の取りうる値の空間を適切に調整する問題に関しては古来より様々な深い研究がなされてきた。その中でも代表的なものは Tanaka による伊藤公式を応用した研究に続く、Skorokhod による確率微分方程式の方法である。この方法は、特に 1 次元の拡散過程 B_t を正に条件付けるときについて、非常に簡明な次のような形式的表現を与える。

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{dB_t}{dt} + \frac{dL_t^X}{dt}$$

ここで、(X_t, L_t^X) の両方が未知関数であるが、L_t^X は X の原点における局所時間とも呼ばれ、広義単調増加な連続函数である。従って上記右辺第 2 項の時間微分は測度として意味を持つことに注意する。

Nualart と Pardoux はこの Skorokhod による方法を確率偏微分方程式に適用することに成功し、非負の値をとる次のような自然な方程式を定式化した。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - f(x,t;u(x,t)) + \eta + \sigma(x,t;u(x,t))\dot{W}(x,t)$$

ここで、η が Skorokhod 方程式における dL_t^X/dt に相当する項で、測度として記述される。彼らの研究では $\sigma \equiv 1$ とし、$x \in [0,1]$ の場合について Dirichlet 境界条件の下で連続関数の空間 $C([0,1],\mathbb{R}_+)$ に値を取る時間発展の存在と一意性が証明された。続く Pardoux と Donati-Martin の研究ではより一般の拡散係数について解の存在が示されたが、一意性は未解決である。この種の方程式は微視的な観点からも、壁上の $\nabla\phi$ 境界相模型の研究に関連して、その平衡揺動を記述する方程式として導出されることがわかっている。この方程式を反射壁を持つ確率偏微分方程式、あるいは単に反射壁確率偏微分方程式と呼ぶ。

そこで、反射壁確率偏微分方程式をたとえば非負値スピン場の連続模型のランダムな時間発展を記述する方程式のように考え、その統計力学的性質を論じることが本論文の目的である。特に、Gibbs 分布と呼ばれる確率分布と反射壁確率偏微分方程式の解の定常分布との関係について議論する。一般に Gibbs 分布は、数学的には DLR 方程式と呼ばれる関係を満たす、状態空間全体の上に定義される確率測度として定式化される。それは、ある有限領域 $[l,r]$ の外部における状態がすべてわかったという条件下における条件付確率分布が、$[l,r]$ における定常状態に一致するという測度である。本論文では、$C(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ における 1 つの Gibbs 分布を定義し、それと反射壁確率偏微分方程式の解の定常分布との関連を議論する。言い換えれば、そのような Gibbs 分布に対する動力学的な解釈を与えることが目的である。その Gibbs 分布を本要旨では反射壁 Gibbs 分布と呼ぶ。

そのような動力学的解釈を与えるためには、反射壁 Gibbs 分布が $C(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ 上の測度として与えられることに応じて、$C(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ に値を取る時間発展を考察せねばならない。すなわち、Nualart や Pardoux らによって定式化された反射壁確率偏微分方程式を実数軸 $\mathbb{R}$ 上で考察することが必要である。確率偏微分方程式を $\mathbb{R}$ 上で考察する場合、たとえ初期値が非常によいものであったとしても、白色雑音の影響が瞬時に無限遠点に到達するため、その影響を制御する必要が生じ、解が存在することすら自明なことではなくなる。本論文の第 1 章では $\sigma \equiv 1$ の場合については f が Lipschitz 連続という条件下で解の存在と一意性を示し、より一般の拡散係数の場合には Lipschitz 連続性に加えて増大度に関する適切な条件を与えて解の存在を示している。一般の拡散係数の場合において解の一意性の問題は未解決のままである。

次の問題は、Nualart や Pardoux らによって与えられた有限区間 $[l,r]$ 上の時間発展と第 1 章で与えられた $\mathbb{R}$ 上の時間発展との関係を議論することである。とくに、$[l,r]$ が $\mathbb{R}$ に収束する場合に、対応する解の収束の問題である。確率偏微分方程式の場合、解の区間が広がることによって、白色雑音の影響は複雑に寄与するため、この収束は全く自明でなくなってしまう。そこで、解全体の法則分布を議論する。すなわち、$[l,r]$ 上で考えた確率偏微分方程式の解 u は $C(\mathbb{R}_+, C([l,r],\mathbb{R}_+))$ 上に確率測度を導入するが、この確率測度の収束を問題とする。また、反射壁確率偏微分方程式の解は函数と測度の組 (u,η) として与えられているので、方程式の結果を適用するために、η によって導入される $[l,r]\times\mathbb{R}_+$ 上の測度の空間上の確率測度についても同時に議論することが必要となる。

そこで、反射壁確率偏微分方程式の解を、$\mathbb{C} := C(\mathbb{R}_+, C(\mathbb{R},\mathbb{R}_+))$ および適切な可積分条件を満たす $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 上の正測度の空間 $\mathbb{M}$ に対して、$\mathbb{W} := \mathbb{C}\times\mathbb{M}$ 上の確率測度として定式化する。ここで、方程式を考えている空間が $[l,r]$ の場合には適切に $\mathbb{R}$ 上に解を拡張しておく。また、空間が $[l,r]$ および $\mathbb{R}$ のそれぞれの場合について反射壁確率偏微分方程式の解（特に区別するときには強解と呼ぶ）を $(u^{l,r},\eta^{l,r})$ および (u,η) と記す。$\mathbb{W}$ 上の確率測度によって定義された反射壁確率偏微分方程式の解を弱解と呼び、空間が $[l,r]$ であるか $\mathbb{R}$ であるかに応じて $P^{l,r}$ および P と記す。本論文の第 2 章第 3

節においてこの弱解をマルティンゲール問題の概念を援用して定義する（Definition 2.3.2）。もちろん、強解は自然に弱解を定める（Proposition 2.3.1）。しかし、実は弱解と強解はある意味で同値であることもわかる（Proposition 2.3.2）。さらに、もし強解が一意であれば弱解も一意であること主張する Yamada–Watanabe 型定理も示す（Proposition 2.3.3）。

この結果と本論文第1章の結果により弱解の存在が示されるので、次に $P^{l,r}$ の相対コンパクト性を証明する。もしこの相対コンパクト性が示されると、その極限点はすべて再び弱解であることがわかる。そのために、弱解がある適切な確率空間の上では強解とみなすことができるという結果を援用して、確率偏微分方程式の議論に立ち戻り、その解に対して適切なノルムの意味での有界性を示す。この有界性の議論から、$P^{l,r}$ は相対コンパクトであることがわかる。$\mathbb{M}$ 上に分布に関しては、$\mathbb{M}$ を線型空間に拡張すると、ある核型の Fréchet 空間の双対空間になっている事実が重要である（Lemma 2.4.4）。さらに、Kolmogorov の連続性定理を援用すると $\mathbb{C}$ 上の測度の相対コンパクト性の問題を $u^{l,r}$ に対する正則性の問題として議論することが可能になる（Lemma 2.4.6）。この証明において、反射壁確率偏微分方程式の解 u が空間方向に関しては $(1/2)-\delta$ 程度、時間方向に関しては $(1/4)-\delta$ 程度の Hölder 連続性を持つことも同時に証明された（Remark 2.4.3）。一方において、Yamada–Watanabe 型定理の主張から $\sigma \equiv 1$ のときには、$(u^{l,r},\eta^{l,r})$ の導く分布が (u,η) の導く分布に収束することが示される（Theorem 2.4.2）。

ここまでの結果によって、反射壁 Gibbs 分布を動力学的立場から特徴づける目標のうち、動力学の存在および収束に関する点は明らかとなった。そこで、次に反射壁 Gibbs 分布を定義する。反射のない場合、Gibbs 分布は Gauss 測度を基礎にして適切な変換を行うことで定義される。反射壁のある場合、その Gauss 測度を3次元ピン留め Bessel 過程の導く確率測度に置き換えることで、反射壁 Gibbs 分布が定義される。この定義の自然さは、すでに修士論文において示された。すなわち、有限体積上においてはそのような測度が反射壁確率偏微分方程式の解に対する可逆確率測度であることが容易に示される（Theorem 2.5.1）。特に、3次元ピン留め Bessel 過程は、1次元ピン留め Brown 運動を正に条件付けたものと同分布であることを注意する。すなわち、反射壁 Gibbs 分布は、反射のない場合の Gibbs 分布を正に条件付けたものとみなすことができる。この Gibbs 分布が反射壁確率偏微分方程式の解 u の定常可逆分布となることは、反射壁確率偏微分方程式の解が定める分布が収束することからから直ちに示される（Theorem 2.5.3）。さらに、もしポテンシャルが真に凸であった場合、再び確率偏微分方程式に戻ってエネルギー不等式（Proposition 2.5.4）を導くことでそのような可逆分布は一意でなければならないことが示される（Theorem 2.5.5）。以上をまとめることで本論文の主定理が導かれる。

定理　反射壁 Gibbs 分布は、反射壁確率偏微分方程式の解の定常可逆分布である。さらに、ポテンシャルが真に凸である場合には定常可逆分布は Gibbs 分布であり、共に一意である。