## 論文審査の結果の要旨

氏名　乙部厳己

反応拡散方程式に白色雑音によるランダムな揺動項を付け加えて得られる確率偏微分方程式は、統計力学、場の量子論、集団遺伝学、工学、経済学など様々な分野において現れ、これまでに数多くの研究がなされてきた。特に原点に剛体壁を置けば、解が常に非負の値をとるように制限することができる。そのような確率偏微分方程式は、Nualart と Pardoux によって導入された。これは有限次元の Skorokhod 型反射壁確率微分方程式の無限次元への拡張であり、確率反応拡散方程式に原点における局所時間に相当する項を付け加えて得られる方程式である。あるいは、特異なポテンシャルから定まるドリフト項を付け加えたと言ってもよい。その後、Pardoux と Donati-Martin は一般の拡散係数をもつ場合へと研究を進め、解の存在と一意性に関する基礎理論が確立された。ただし、拡散係数が一般のときの解の一意性は現在に至るまで未解決である。

これらの研究において考察の対象になったのは、両端で Dirichlet 境界条件をもつ 1 次元の有界区間上の反射壁確率偏微分方程式である。統計力学や場の量子論に関係する諸問題においては、無限体積、つまり $\mathbb{R}$ 上でこのような方程式を考察することが望まれる。このような問題意識に基づいて、論文提出者乙部は、まず Pardoux らの結果を $\mathbb{R}$ 上の反射壁確率偏微分方程式に拡張し、解の存在と一意性に関する結果を得た。無限領域だから遠くからの白色雑音の影響を制御する必要があり、適当な関数空間を設定して議論している。さらに、この方程式の平衡状態を調べるという新たな方向に研究を進め、拡散係数が定数の場合に連続場の Gibbs 測度との関係を明らかにした。

Gibbs 測度は DLR 方程式とよばれる関係式によって特徴付けられる。すなわち、各有界区間の外部の状態がわかったという条件の下で、この区間の内部における条件付き確率を規定する関係式である。反射壁確率偏微分方程式の解は常に非負だから、Gibbs 測度も $\mathbb{R}$ 上の非負連続関数のクラスの上の確率測度になる。このような Gibbs 測度のことを論文提出者乙部は反射壁 Gibbs 測度とよび、それが反射壁確率偏微分方程式の可逆測度であることを証明している。そのためにまず、有界区間における条件付き確率に相当する有限 Gibbs 測度が、有界区間上の反射壁確率偏微分方程式の可逆測度であることを示す必要がある。しかしこのことは、既に論文提出者の修士論文において示されている。また、その後全く同じ結果が Zambotti によって異なる手法を用いて示されたが、乙部の方法の方が簡明であることを注意しておきたい。

次の段階は、有界区間を無限領域 $\mathbb{R}$ 全体に広げる極限操作を実行することである。そのために乙部は、反射壁確率偏微分方程式の弱解、あるいは同じことだが対応するマルチンゲール問題の解の収束を証明した。極限の $\mathbb{R}$ 上の方程式の弱解の一意性が必要に

なるが、有限次元の確率微分方程式に対する山田と渡辺の結果を拡張することにより示された。特にポテンシャルが真に凸の場合には、エネルギー不等式の手法を援用して反射壁確率偏微分方程式の定常確率測度の一意性を2次モーメントが存在するクラスにおいて示し、したがって可逆測度も一意的であることがわかった。このようにして、凸ポテンシャルに対して反射壁確率偏微分方程式の可逆測度と反射壁 Gibbs 測度が完全に一致することを示したのである。

今後は、例えば Dirichlet 形式理論に基づく時間発展の構成との比較、反射壁確率偏微分方程式の系、つまり値が多次元である場合の研究などへと展開していくことが期待される。

よって、論文提出者乙部厳己は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。