論文内容の要旨

論文題目　Discrete dynamical systems associated with root systems of indefinite type

(不定型のルート系に付随する離散力学系)

氏　　名　　竹縄知之

特異点閉じ込め判定法は (有限または無限次元) 離散力学系に対する可積分性の判定条件として Grammaticos,Ramani,Papageorgiou によって提唱された方法である. ある初期値に対して特異性が現れても (その初期値を中心とするローラン展開を計算することにより) それが有限ステップ後には消え, 初期値の情報が復元できるとき, 判定条件を満たすと言う. 従って, この力学系はそもそも可逆でなくてはならない.

ところがその「反例」が Hietarinta と Viallet によって発見された. この力学系は特異点閉じ込め判定条件を満たすのに, カオス的な振舞を示す. また彼らはその複雑さを量るものとして, 代数的エントロピーという概念を提唱した. 代数的エントロピーは $s := \lim_{n\to\infty} \log(d_n)/n$ と定義される. ここで d_n は n 回繰り返したときの写像の次数である. この概念は Arnord によって導入された複雑度と関係がある. なぜなら写像の次数は曲線と超曲面との交点数と一致するからである. 通常の非線形力学系において, その次数は指数的に増大するのに対して, 多くの可積分な力学系では多項式オーダーでしか増大しないことが知られている.

離散パンルヴェ方程式は主に Ramani,Grammaticos,Hietarinta, 神保, 坂井らによって発見され, 多方面から研究されている. 近年, 拡大されたアフィンワイル群と有理曲面の関係を調べることで, それらが (対称性の観点から) 全て得られることが, 坂井によって示された.

複素射影空間 $\mathbb{P}^2$ または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ をブローアップして得られる曲面に対しては, その曲面のピカール群上のクレモナ等長変換の成す群と, ワイル群との関係という観点からいくつかの研究があった. ここで有理曲面 X のピカール群とは,X 上の可逆層の同値類全体の成す群の

ことであり,X 上の因子の線形同値類の成す加法群と同型である．またクレモナ等長変換とはピカール群の同型であって,a) 任意の 2 つの因子類の交叉数を保つ, b) 標準因子 K_X を変えない, c) 有効因子類全体の成す集合を変えない，ものである．特にブローアップされる点が 9 点で ($\mathbb{P}^2$ の場合, $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ の場合は 8 点), 点が一般の位置にあるとき, クレモナ等長変換の成す群は $E_8^{(1)}$ 型のアフィンワイル群を成す．9 点が一般の位置にないときの, クレモナ等長変換の成す群と拡大されたアフィンワイル群との関係の分類については, Looijenga による先駆的な研究があり, 坂井によってより一般に調べられた．$\mathbb{P}^2$(または $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$) 上の双有理写像はブローダウンの仕方を変えることによって得られる．特に離散パンルヴェ方程式はアフィンワイル群の平行移動に対応する双有理写像として得られる．

本論文の目的は有理曲面の理論の観点から, 特異点閉じ込め判定条件を満たすがカオス的な振舞を示す力学系 (双有理写像) を特徴づけることである．そのような力学系の初期値空間を考えることにより, 不定型のルート系と関係する有理曲面を得る. 逆に曲面から力学系を再構成し, 結果として非自励的な力学系への拡張を得る. 同様にして他のいくつかの力学系を構成する．また, 行列の簡単な計算によって n ステップ後の写像の次数を計算する方法を与える. 離散パンルヴェ方程式の場合には次数の増加が $O(n^2)$ であることを示す.

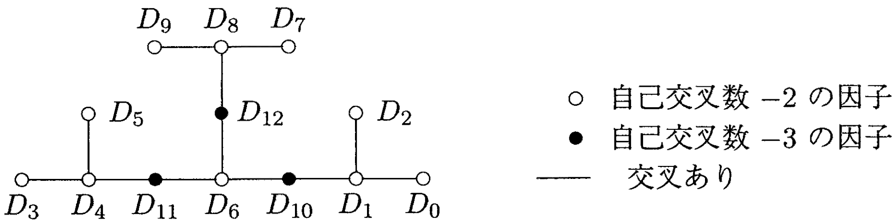
第 2 節では Hietarinta と Viallet によって発見された次のような写像 (HV 方程式) を考える.

$$\varphi \ : \ (x,y)\mapsto(\overline{x},\overline{y})=(y,-x+y+a/y^2), \tag{1}$$

ここで $(\overline{x},\overline{y})$ は (x,y) の像を意味する．φ の不確定点をブローアップによって解消することにより, φ が, その自己同型射に持ち上がるような初期値空間を構成する. ここで φ が定義されている点で φ と φ' が一致しているとき, φ' は φ の持ち上げであると言う. 次の定理を得る.

THEOREM 1 φ は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ を 14 回ブローアップすることで得られる有理曲面 X の自己同型射に持ち上げられる.

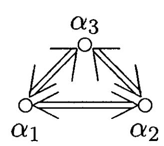
ここで,X における反標準因子 $-K_X$ の既約因子への分解を構成する因子 D_i たちの交叉の様子は次の図で表される.



第 3 節では, 初期値空間の対称性を調べる. 次の定理及びその系を得る.

THEOREM 2 X 上のピカール群のクレモナ等長変換全体は

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$



というカルタン行列で表される双曲型のワイル群をそのディンキン図の自己同型群で拡大した群を成し,HV方程式のピカール群への作用はその元の一つである.

COROLLARY 3 X 上の可換なクレモナ等長変換で φ と可換なものは φ^m のみである.

第4節では,曲面から拡大されたワイル群の元として,HV 方程式を復元する.拡大されたワイル群の元は全て,クレモナ等長変換としてピカール群に作用するが,その作用はブローダウン構造の取り換えにより,$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上のクレモナ変換,つまり双有理写像,として実現される.ここでブローダウン構造とは,ブローダウンの仕方を指定する列のことである.この結果として,次のような非自励的な方程式への拡張を得る.

$$
\begin{aligned}
w_2 \circ \sigma_{13} \circ \sigma_{12} \quad & : (x, y; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \\
\mapsto \quad & (y, -x + y + a_5 + \frac{a_1}{y^2} + \frac{a_2}{a_1 y}\ ; \\
& a_6, -a_7 + 2a_5^2 a_6 + \frac{2a_2 a_6}{a_1}, a_1, a_2, -a_5, a_3, a_4 + 2a_3 a_5^2 - \frac{2a_2 a_3}{a_1}).
\end{aligned}
$$

この式は $a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$ かつ $a_1 = a_3 = a_6 = a$ のとき元の HV 方程式と一致する.

第5節では,適当な有理曲面に持ち上げられる写像の n ステップ後の次数を計算する方法を与える.因子同士の交叉数を考えることにより,その次数は,写像のピカール群への作用から定まる行列を n 乗することによって与えられることが分かる.この方法を離散パンルヴェ方程式に応用することにより,次のことが分かる.

THEOREM 4 離散パンルヴェ方程式に対して,n ステップ後の次数 $\deg(\varphi^n)$ は高々$O(n^2)$ であり,従って代数的エントロピーは0である.

第6節では,適当なワイル群から出発して他の写像を構成することを考える.いくつかの例を提示する.例えば次のような力学系を得る.

$$
w_2 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 : (x, y; a_1, a_4, a_7, a_8) \ \mapsto \ (-y, x - y - a_7 + \frac{a_1}{y^3}; -a_8, a_1, a_7, a_4), \qquad (2)
$$

ただし $a_1, a_4, a_7, a_8 \in \mathbb{C}$ である.