論文審査の結果の要旨

氏　名　　竹縄　知之

本論文提出者は不定型のルート系に付随する離散力学系について論じ、特異点閉じ込め判定条件を満たすがカオス的な振舞を示す力学系 (双有理写像) の特徴づけを行った。また、そのような力学系の初期値空間を考えることにより、不定型のルート系と関係する有理曲面を得るとともに、逆に曲面から力学系を再構成することにより非自励的な力学系への拡張を得ている。さらに、行列の簡単な計算によって n ステップ後の写像の次数を計算する方法を与え、離散パンルヴェ方程式の場合には次数の増加が $O(n^2)$ であることを示している。

特異点閉じ込め判定法は (有限または無限次元) 離散力学系に対する可積分性の判定条件として Grammaticos、Ramani、Papageorgiou によって提唱された方法であり、ある初期値に対して特異性が現れてもそれが有限ステップ後には消え、初期値の情報が復元できるとき、判定条件を満たすと言う。ところが最近、その「反例」が Hietarinta と Viallet によって報告された。この力学系は特異点閉じ込め判定条件を満たすのに、カオス的な振舞を示す。また彼らはその複雑さを量るものとして、代数的エントロピーという概念を提案した。代数的エントロピーは $s := \lim_{n\to\infty} \log(d_n)/n$ と定義される。ただし、d_n は n 回繰り返したときの写像の次数である。この概念は Arnord によって導入された複雑度と関係があり、通常の非線形力学系においてその次数は指数的に増大するのに対して、多くの可積分な力学系では多項式オーダーでしか増大しないことが知られている。

一方、離散パンルヴェ方程式は主に Ramani、Grammaticos、Hietarinta、神保、坂井らによって発見され、多方面から研究されている。近年、拡大されたアフィンワイル群と有理曲面の関係を調べることで、それらが (対称性の観点から) 全て得られることが坂井によって示された。複素射影空間 $\mathbb{P}^2$ または $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ をブローアップして得られる曲面に対しては、その曲面のピカール群上のクレモナ等長変換のなす群と、ワイル群との関係という観点からいくつかの研究がなされているが、特にブローアップされる点が 9 点で、点が一般の位置にあるとき、クレモナ等長変換のなす群は $E_8^{(1)}$ 型のアフィンワイル群となることが知られている。ところで、9 点が一般の位置にないときのクレモナ等長変換のなす群と拡大されたアフィンワイル群との関係の分類については、Looijenga による先駆的な研究があり、また坂井によってより一般に調べられた。その中で上述の $\mathbb{P}^2$(または $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$) 上の双有理写像はブ

ローダウンの仕方を変えることによって得られること、特に離散パンルヴェ方程式はアフィンワイル群の平行移動に対応する双有理写像として得られることが指摘された。

本論文では第2章で Hietarinta と Viallet によって発見された写像 (HV 方程式) が、$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を14回ブローアップすることで得られる有理曲面 X の自己同型射に持ち上げられることを示し、第3章で、初期値空間の対称性を調べることにより、X 上のピカール群のクレモナ等長変換全体があるカルタン行列で表される双曲型のワイル群をそのディンキン図の自己同型群で拡大した群をなすこと、及び HV 方程式のピカール群への作用はその元の一つであることを示している。また第4章では、曲面から拡大されたワイル群の元として HV 方程式を復元するとともに、非自励的な方程式への拡張を得ている。さらに第5章で、適当な有理曲面間の同型射に持ち上げられる写像の n ステップの次数を計算する方法を与え、その応用として、離散パンルヴェ方程式の代数的エントロピーは0であることを示している。最後に第6章で、適当なワイル群から出発することによりして HV 方程式以外の同様の性質を持つ力学系を提案している。

以上、本論文は数学的基礎付けが求められていた特異点閉じこめ判定法に重要な解釈を与えるとともに、その結果として、未解明であったあるクラスの力学系の特性を明らかにし、さらに本質的な拡張を与えている。本論文の成果は離散可積分系の研究に新しい光を当てるものであり、そこで用いられている方法は数理科学的方法論の一つの方向性を示唆するものと考えられる。

よって論文提出者 竹縄知之 は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。