論文内容の要旨

論文題目：Existence and asymptotic behavior of the solutions of the coulped system of wave equations with different propagation speeds

(伝播速度の違う波動方程式のカップルしたシステムの解の存在、及び漸近挙動について)

氏名：津川 光太郎

本論文では，伝播速度の違う波動方程式のカップルしたシステムに対して，次の二つの問題を考える．第一章では，様々なタイプの２次の非線形項を持つ場合に対して初期値問題の時間局所適切性 (解の一意存在、初期値に対する解の連続依存性) について考える．物理に現れる方程式にはエネルギーを持つものが多く, エネルギークラスで適切性を示す事が出来ると時間大域可解性や変分法的手法の研究に役に立つため, 出来るだけ広いクラスの初期値に対して適切性を考える事が重要だと思われる．第二章では，$|u|^{p_j}|v|^{q_j}$ というタイプの非線形項に対する，自己相似解の存在問題について考える．非線形波動方程式の解の時間無限大での解の振る舞いを調べる手法としては, 非線形散乱理論が有用だが, 他のアプローチとして自己相似解の解析がある．この為, 自己相似解の特徴を調べる事は重要であると思われる．いずれの場合も単独の波動方程式や同じ伝播速度の波動方程式のカップルしたシステムの場合に対しては多くの研究がなされているが，伝播速度の違う波動方程式がカップルしたシステムの場合には，特異性の伝播のずれにより解の性質が良くなる可能性があるため，どのような違いが現れるかを考察するのが目的である．

以下，各章における主結果を述べる．第一章では以下のようなシステムの初期値問題を

考える.

$$(\partial_t^2 - \Delta)f = F(f, \partial f, g, \partial g), \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$(\partial_t^2 - s^2\Delta)g = G(f, \partial f, g, \partial g), \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$f(x,0) = f_0(x) \in H^a, \quad \partial_t f(x,0) = f_1(x) \in H^{a-1}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{3}$$

$$g(x,0) = g_0(x) \in H^a, \quad \partial_t g(x,0) = g_1(x) \in H^{a-1}, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

ここで ∂ は $\partial_{x_j}(1 \le j \le n)$ もしくは ∂_t, 伝播速度 s は $s > 1$ とする. 出来るだけ小さな a に対して時間局所適切性を示すのが目標である. 非線形項については本論文では4つの場合を考えているが, ここでは以下の2つの場合についてのみ述べる.

$$\begin{array}{llll} (Case0) & F_{01} = fg, & & F_{02} = g^2, \\ & G_{01} = fg, & & G_{02} = f^2, \\ (Case2) & F_{21} = D(fg), & & F_{22} = D(g^2), \\ & G_{21} = D(fg), & & G_{22} = D(f^2). \end{array}$$

各々の場合において F は F_{ij} のいずれか, G は G_{ij} のいずれかとする. $D = \sqrt{-\Delta}$ の代わりに ∂ としても以下同様の議論が成り立つ. 今までに知られている結果として $s = 1$ の場合に対しては以下を満たす a に対して時間局所適切性が示されている.

	$n \ge 5$	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$	$n = 1$
(Case 0)	$a > (n-4)/2$	$a > 1/4$	$a > 0$	$a \ge 0$	$a \ge 0$
(Case 2)	$a > (n-1)/2$	$a > 3/2$	$a > 1$	$a > 3/4$	$a > 1/2$

この結果はエネルギー法と波動方程式に対する Stricharz 評価式により示される. Stricharz 評価式は波動方程式の分散効果から得られる評価式だが, 低次元では良い評価が得られない事が知られており, これにより Case 2 の場合の結果において $n \le 2$ では a の値の下限が $(n-1)/2$ より大きくなっている. また Case 0 においては別の理由により $a < 0$ で示す事は難しい. さらに Lindblad('93) によって $n = 3$ では Case 0 と Case 2 に対してそれぞれ $a = 0$ と $a = 1$ で 適切で無い事が示されている. これに対して $s > 1$ の場合には Ozawa,Tsutaya,Tsutsumi('99) 及び T('00) によって $n = 3$ で Case 2 のいくつかの場合に対して $a \ge 1$ で時間局所適切である事が示された. 参考論文においてこれを Maxwell

と scalar 場がカップルしたシステムに対して応用し, エネルギークラスにおいて時間大域適切性を示した. これらの結果は伝播速度の違いが a の値の下限を下げるのに役立つ事を示唆しており, 本論文では $n = 1, 2$ の場合に対して以下の結果を得た.

定理 1. $s > 1$ とすると, 以下を満たす a に対して (1)-(4) のシステムは時間局所適切である.

	$n = 2$	$n = 1$
(Case 2)	$a > 1/2$	$a > 0$

この結果は Stricharz 評価式において $n = 2, 1$ において失われていた分散効果が伝播速度の違いにより, それぞれ 1/4 と 1/2 回復される事を示している. また本論文において, ある非線形項に対してはそれぞれ等号も含めた $a \geq 1/2$ と $a \geq 0$ で適切である事や, 他のある非線形項に対しては $a = 1/2$ と $a = 0$ で必要となる bilinear estimate が成立しない事も示した. Case 0 の場合に対しては以下の結果を得た.

定理 2. $s > 1, F \neq F_{02}, G \neq G_{02}$ とすると以下を満たす a に対して (1)-(4) のシステムは時間局所適切である.

	$n = 2$	$n = 1$
(Case 0)	$a \geq -1/4$	$a \geq -1/4$

この結果は伝播速度が同じ場合に比べて 1/4 回復する事を示している. 以上のように, $n = 3$ の場合には等号が含まれる違いしか現れなかったが $n = 1, 2$ では, 真に 1/2 や 1/4 回復しなければならない点が証明の困難な点である.

第二章では以下のようなシステムの自己相似解の存在について考える.

$$\left(\partial_t^2 - \Delta\right) u(x,t) = |u(x,t)|^{p_1} |v(x,t)|^{q_1}, \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0, \tag{5}$$

$$\left(\partial_t^2 - s^2\Delta\right) v(x,t) = |u(x,t)|^{p_2} |v(x,t)|^{q_2}, \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0, \tag{6}$$

$$u(x,0) = f_1(x), \qquad \partial_t u(x,0) = g_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{7}$$

$$v(x,0) = f_2(x), \qquad \partial_t v(x,0) = g_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{8}$$

ここで伝播速度は $s > 1$ もしくは $0 < s < 1$ とし $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = \alpha + 1$ とする. また (5)-(8) の解 $(u(x,t), v(x,t))$ で任意の $\lambda > 0$ に対して $(u(x,t), v(x,t)) \equiv \lambda^{2/\alpha}(u(\lambda x, \lambda t), v(\lambda x, \lambda t))$ を満たす解を, 自己相似解と呼ぶ. 出来るだけ小さな p_j, q_j, α に

対して自己相似解の存在を示すのが目標である. ここで, 今までに知られている結果として以下のような単独の方程式に対する結果を述べる.

$$\left(\partial_t^2 - \Delta\right) u(x,t) = |u(x,t)|^{\alpha+1}, \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0. \tag{9}$$

Pecher ('00) は (9) は $\alpha > \sqrt{2}$ に対して自己相似解が存在し, $\alpha \leq \sqrt{2}$ に対しては小さな初期値に対しても一般には自己相似解が存在しない事を示した. ここで現れるという $\sqrt{2}$ 値は時間大域解の存在問題と関係があり, $\alpha > \sqrt{2}$ ならば滑らかで小さな初期値に対して時間大域解が存在し, $\alpha \leq \sqrt{2}$ ならば爆発解が存在する事が知られている. 一方, 伝播速度の違う波動方程式のシステム (5)–(8) に対しては最近 Kubo により $\alpha = \sqrt{2}, p_j, q_j \geq 1$ で時間大域解が存在する事が示された. この結果においては特異性を持たない初期値を扱っているため自己相似解の存在を含んでいない. また $\alpha < \sqrt{2}$ の場合については考えられていない. しかし, この結果は伝播速度の違いを利用する事によって自己相似解が存在するため α の値を下げられるかもしれない事を示唆している. そこで以下の結果を得た.

定理 3. $2 > \alpha > 1$ とする. $j = 1, 2$ に対して $p_j \geq 1,\ q_j \geq 1$ とし, $f_j(x) \in C^1(\mathbb{R}^3_*)$, $g_j(x) \in C^0(\mathbb{R}^3_*)$ は以下を満たすとすると,

$$|f_j(x)| \leq \epsilon |x|^{-2/\alpha}, \quad |g_j(x)| + |\nabla f_j(x)| \leq \epsilon |x|^{-2/\alpha - 1},$$

十分小さな $\epsilon > 0$ に対して, (5)–(8) の時間大域解 (u, v) が一意に存在する.

この定理の系として $F_j \in C^1$, $G_j \in C^0$, $j = 1, 2$ に対しての初期値を以下の様に取ると,

$$f_j(x) = \epsilon F_j(x/|x|)|x|^{-2/\alpha}, \quad g_j(x) = \epsilon G_j(x/|x|)|x|^{-2/\alpha - 1},$$

定理 3 により時間大域解が一意に存在し, その解は自動的に自己相似解になる. また, あるクラスの解が漸近的に自己相似解の様に振る舞う事も示される. 反例については以下の結果を得た.

定理 4. $\Omega = \left\{(p,q) \middle| 2/\alpha - 1 \geq \min\{p^{-1}, q^{-1}\}\right\}$ とする. $(p_1, q_1) \in \Omega$ もしくは $(p_2, q_2) \in \Omega$ ならば小さな初期値に対しても一般には自己相似解が存在しない.

定理 3 と定理 4 より, $p_1 = q_1 = p_2 = q_2$ の場合には $\alpha > 1$ が optimal な条件である事がわかる.