論文審査の結果の要旨

氏名 津川 光太郎

本論文提出者 津川光太郎は、次のような伝播速度の異なる非線形波動方程式系に対して，初期値問題の適切性及び自己相似解の存在とその安定性について研究した．

$$\partial_t^2 u - \Delta u = F(u, v, \partial u, \partial v), \quad t > 0, \quad x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{1}$$
$$\partial_t^2 v - c^2 \Delta v = G(u, v, \partial u, \partial v), \quad t > 0, \quad x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{2}$$
$$u(0,x) = u_0, \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), \tag{3}$$
$$v(0,x) = v_0, \quad \partial_t v(0,x) = v_1(x). \tag{4}$$

但し，$\partial u = (\partial_t u, \nabla u)$, $1 \leq n \leq 3$ であり，c は $c \neq 1$ なる正定数とする．

まず，初期値問題の可解性については，Strichartz 評価式とよばれる，解の時空間可積分性に関する不等式が重要な役割を果たすことが，近年のさまざまな研究により明らかになった．しかし，Strichartz 評価式は，$n \geq 4$, $n = 3$, $1 \leq n \leq 2$ のそれぞれの場合に対応して，かなり成立条件が異なる．これは，$1 \leq n \leq e$ のときはある意味で Strichartz 評価式が退化している事による．この退化性がほどけるような状況の下では，初期値問題はより広い関数空間で一意可解となることが期待される．このような Stricahrz 評価式の退化性がほどける十分条件としては，Klainerman や Christodoulou によって導入された "null condition" があり，これは応用上も大きな成果をあげた．これとは異なる状況として，伝播速度の異なる場合が，$n = 3$ のとき Ozawa, Tsutaya and Tsutsumi によって考察された．本論文提出者は，より退化の度合いが大きい $n = 1, 2$ の場合について，伝播速度の異なる場合，すなわち $c \neq 1$ の場合に対して，初期値問題の一意可解性を研究し，非線形項 F, G の性質と初期値問題が適切となる関数空間の関係を明らかにした．

次に，非線形波動方程式の解の時刻無限大での漸近挙動は，従来非線形散乱理論の枠組で調べられることが多かった．一方，最近非線形放物型方程式に対しては，自己相似解とその安定性を調べることにより，解の漸近挙動を解析する研究が盛んに行なわれている．単独の非線形波動方程式に対しては，このような方向での研究がすでに始まっているが，本論文提出者はこの問題を伝播速度の異なるシステムについて研究した．具体的には，$n = 3$ のとき，

$$F = |u|^{p_1}|v|^{q_1}, \quad G = |u|^{p_2}|v|^{q_2}, \tag{5}$$
$$p_j,\ q_j \geq 1, \quad p_1 + q_1 = p_2 + q_2$$

という非線形関数を考え，指数 p_j, q_j に関する自己相似解の存在・非存在のための条件を求め，さらに自己相似解が存在する場合にそれが安定であることを示した．ここで，非線形関数 F と G が (5) で与えられるとき，方程式 (1)-(2) の解 (u,v) が自己相似解であるとは，$\alpha = p_1 + q_1 - 1$（したがって，$\alpha = p_2 + q_2 - 1$ でもある）とおくとき，

$$(u(t,x), v(x,t)) = \lambda^{2/\alpha}(u(\lambda t, \lambda x), v(\lambda t, \lambda x)), \quad \lambda > 0$$

となるような解のことである．本論文提出者は，伝播速度の相違が自己相似解の存在・非存在にどのような影響を与えるのかについて，詳細な解析を行なった．

このように，本学位申請論文は，非線形波動方程式の数学的研究の分野において，顕著な貢献をしたものと認められる．　よって，論文提出者　津川 光太郎 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．