論文の内容の要旨

論文題目: On the closed chains and the spectrum of Laplacian on graphs
和訳: グラフにおけるラプラシアンのスペクトルと閉路について

氏名: 鶴田 知久

伊原ゼータ関数は、伊原 [I] により、有限グラフに対して以下の様に定義された。すなわち、有限 (正則) グラフ $G=(V,E)$ に対して、伊原ゼータ関数 $Z(u)$ は

$$Z(u)=\prod_{\mathfrak{p}\in P}\left(1-u^{|\mathfrak{p}|}\right)^{-1} \tag{0.1}$$

である。ここで P は G 内の back-tracking, tail のない (以下、これを non-BT で表す。)prime な閉路からなる集合であり、$|\mathfrak{p}|$ は $\mathfrak{p}$ の長さをあらわすものである。
そしてこれに対して、伊原 [I]、Bass[Ba] らが、隣接行列 A との関係を次のように明らかにした。すなわち、有限グラフ $G=(V,E)$(正則グラフは伊原、それ以外のグラフについては Bass) に対して、隣接行列を

$$A(x,y)=\begin{cases}1 & x\sim y\\ 0 & x\not\sim y\end{cases}$$

で定義する。このとき

$$Z(u)=(1-u^2)^{\chi(G)}\det\left(I-uA+u^2(D-I)\right) \tag{0.2}$$

ここで $\chi(G) = |V| - \frac{|E|}{2}$ は G のオイラー数、D は $D_{xx} = \deg x$ ($\deg x = \sharp\{y \in V; x \sim y\}$) で定義される $|V|$ 次正方対角行列である。
(0.2) により、non-BT かつ prime な閉路の個数と隣接行列との間には密接な関係が得られる。すなわち、隣接行列と単位行列の線型和で表される行列の行列値として得られる多項式の n 次の係数が、長さ n 以下の non-BT, prime な閉路の数の線型和として表せる。
これに対し、non-BT な閉路 c に関して、これの確率的な値 $p(c)$、すなわち c を一周する確率をとる。このとき、これと推移行列との関係、特にラプラシアンの固有値との関係について調べたい、またその関係を具体例について求めてみたいというのが、我々の研究のモチベーションである。

ここで、グラフ上の推移行列、ラプラシアンの定義を紹介する。
$G = (V, E$ に対して、推移行列 P は、$x, y \in V$ に対し

$$P(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\deg x} & x \sim y \\ 0 & x \not\sim y \end{cases}$$

と定義する。このとき、G 上のラプラシアン $\Delta_0 : C(V) \longrightarrow C(V)$ は

$$\Delta_0 = I - P$$

とするのである。ここで $C(V)$ は、G 内の頂点に関する関数全体の集合である。

我々はそのために、いわばデュアルグラフ (これは小谷・砂田 [KS] 等で有向ライングラフと呼ばれているものである) を用い、これの推移行列 P'_E を仲介させることにより、back-tracking や tail を持たない閉路の確率的な値と、ラプラシアンの固有値との関係を求めるという方針で研究を行った。その結果、この値とラプラシアンの固有値との関係が、以下のように表されることがわかった。

Theorem 1.1. 有限グラフ G に対して、G 内の長さ l の閉路全体の集合を $C'(l)$、長さ l の back-tracking、tail のない閉路全体の集合を $C(l)$ とする。また、Δ_0 の固有値を $0 = \lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_{n-1} (|V| = n)$ とする。このとき、

$$\sum_{c \in C'(l)} p(c) = tr({P'_E}^l) = \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \lambda_i)^l . \tag{0.3}$$

$$\sum_{c \in C(l)} p(c) = tr({P_E}^l). \tag{0.4}$$

ここで、$c = \{c_0, c_1, \cdots, c_l\}$ に対し、

$$p(c) = \prod_{i=0}^{l-1} \frac{1}{\deg c_i}$$

また、

$$P_E(e, e') = \begin{cases} P'_E(e, e') & e \neq \bar{e'} \\ 0 & e = \bar{e} \end{cases}$$

である。

次に我々は、より具体的な値を求めるために、次のような特殊な準正則グラフ $G = (V, E)$、すなわち、V_1、V_2 からそれぞれ任意に頂点をとったとき、その 2 頂点が隣接しているような非交和 $V = V_1 \sqcup V_2$ を持つグラフである。このグラフに関して(0.3)、(0.4) の値を求めた。それが以下の結果である。

Theorem 1.2. 有限グラフ G が、上記の条件を満たすとする。このとき次が成り立つ。

$$\sum_{c \in C'(m)} p(c) = |E_0| \frac{1}{n_1 n_2}, \tag{0.5}$$

$$\sum_{c \in C(m)} p(c) = |E_0| \left(\frac{1}{n_1 n_2} \right)^l \prod_{i=1,2} \left\{ (n_i - 1)^l - (-1)^l (n_i - 1) \right\}. \tag{0.6}$$

ここで、$n_i = V_i \ (i = 1, 2)$ である。
最後に、本論文の構成について述べる。
2 章では、まず本論文で用いる用語の説明、簡単な事実について述べる。
3 章では、グラフの辺上のラプラシアンと、有向ライングラフの推移行列の 2 つの道具についての説明を行う。そしてこれと上記の Δ_0 との関係について言及する。
4 章では、これらの道具を用いた上で、Theorem 1.1 の証明を行う。
5 章では、4 章で得た結果を用いて、準正規グラフの特殊なものに関して、(0.3) と(0.4) の値を求めることにより、Theorem 1.2 の証明を行う。

参考文献

[Ba] H. Bass, *The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice*, Internat. J. Math **3** (1992), 717-797.

[I] Y. Ihara, *On discrete subgroups of the two by two projective linear group over $\mathfrak{p}$-adic fields*, J. Math. Soc. Japan, **18** (1966), 219-235.

[ST] H. M. Stark and A. A. Terras, *Zeta functions of finite graphs and coverings*, Adv. Math, **121** (1996), 124-165.

[Su] T. Sunada, *Fundamental Group and Laplacian, Kinokuniya*, (1988).

[KS] M. Kotani and T. Sunada, *Zeta functions of finite graphs*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **7** (2000), 7-25