論文審査の結果の要旨

鶴田　知久

向き付けられた有限グラフ $G=(V,E)$ 上には色々なラプラシアンが知られており、そのいくつかは、グラフの幾何学的、解析的な性質を記述するに有効であることが知られている。申請者はこの方面の全く新たな興味ある問題を提起し結果を得た。

申請者の問題を述べるために、この方面の最も基本的な結果をまず紹介する。有限 (正則) グラフ $G=(V,E)$ に対して、伊原ゼータ関数 $Z(u)$ を

$$Z(u)=\prod_{\mathfrak{p}\in P}\left(1-u^{|\mathfrak{p}|}\right)^{-1} \tag{1}$$

で定義する。ここで P は G 内の back-tracking, tail のない (以下、これを non-BT で表す。)prime な閉路からなる集合であり、$|\mathfrak{p}|$ は $\mathfrak{p}$ の長さをあらわすものである。 一方、隣接行列を

$$A(x,y)=\begin{cases}1 & x\sim y\\ 0 & x\not\sim y\end{cases}$$

で定義する。このとき

$$Z(u)=(1-u^2)^{\chi(G)}\det\left(I-uA+u^2(D-I)\right) \tag{2}$$

ここで $\chi(G)=|V|-\frac{|E|}{2}$ は G のオイラー数、D は $D_{xx}=\deg x$ ($\deg x=\sharp\{y\in V; x\sim y\}$) で定義される $|V|$ 次正方対角行列である。
(2) により、non-BT かつ prime な閉路の個数と隣接行列との間には密接な関係が得られる。すなわち、隣接行列と単位行列の線型和で表される行列の行列値として得られる多項式の n 次の係数が、長さ n 以下の non-BT, prime な閉路の数の線型和として表せる。
これに対し、non-BT な閉路 c に関して、これの確率的な値 $p(c)$、すなわち c を一周する確率をとる。このとき、これと推移行列との関係、特にラプラシアンの固有値との関係について調べたい、またその関係を具体例について求めてみたいというのが、申請者の研究のモチベーションである。
ここで、グラフ上の推移行列、ラプラシアンの定義を紹介する。
$G=(V,E)$ に対して、推移行列 P は、$x,y\in V$ に対し

$$P(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\deg x} & x\sim y\\ 0 & x\not\sim y\end{cases}$$

と定義する。このとき、G 上のラプラシアン $\Delta_0: C(V)\longrightarrow C(V)$ は

$$\Delta_0=I-P$$

とするのである。ここで $C(V)$ は、G 内の頂点に関する関数全体の集合である。

申請者はそのために、いわばデュアルグラフを用い、これの推移行列 P'_E を仲介させることにより、back-tracking や tail を持たない閉路の確率的な値と、ラプラシアンの固有値との関係を求めるという方針で研究を行った。その結果、この値とラプラシアンの固有値との関係が、以下のように表されることを証明した。

Theorem 1.1. 有限グラフ G に対して、G 内の長さ l の閉路全体の集合を $C'(l)$、長さ l の back-tracking、tail のない閉路全体の集合を $C(l)$ とする。また、Δ_0 の固有値を $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} (|V| = n)$ とする。このとき、

$$\sum_{c \in C'(l)} p(c) = tr({P'_E}^l) = \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \lambda_i)^l . \tag{3}$$

$$\sum_{c \in C(l)} p(c) = tr({P_E}^l). \tag{4}$$

ここで、$c = \{c_0, c_1, \cdots, c_l\}$ に対し、

$$p(c) = \prod_{i=0}^{l-1} \frac{1}{\deg c_i}$$

また、

$$P_E(e, e') = \begin{cases} P'_E(e, e') & e \neq \bar{e'} \\ 0 & e = \bar{e} \end{cases}$$

である。

次に申請者は、より具体的な値を求めるために、次のような特殊な準正則グラフ $G = (V, E)$、すなわち、V_1、V_2 からそれぞれ任意に頂点をとったとき、その 2 頂点が隣接しているような非交和 $V = V_1 \sqcup V_2$ を持つグラフである。このグラフに関して(3)、(4) の値を求めた。それが以下の結果で述べられる。

Theorem 1.2. 有限グラフ G が、上記の条件を満たすとする。 このとき次が成り立つ。

$$\sum_{c \in C'(m)} p(c) = |E_0| \frac{1}{n_1 n_2}, \tag{5}$$

$$\sum_{c \in C(m)} p(c) = |E_0| \left(\frac{1}{n_1 n_2} \right)^l \prod_{i=1,2} \left\{ (n_i - 1)^l - (-1)^l (n_i - 1) \right\}. \qquad (6)$$

ここで、$n_i = V_i \ (i = 1, 2)$ である。