論文内容の要旨

論文題目: HIGHER-DIMENSIONAL PARALLEL TRANSPORT AND ITS APPLICATIONS
（平行移動の高次元化とその応用）

氏　名: 寺嶋　郁二

微分可能多様体 X の直線束の接続についての古典的な平行移動は、曲線

$$\gamma : [0,1] \to X$$

に対して、ファイバーの間の線型写像を与える。この論文ではまず、五味清紀氏（東大数理）との共著論文に基づき平行移動の概念を‘高次元化’し、その基本的な性質を証明する。つまり、1 次元の境界つき微分可能多様体 $[0,1]$ の代わりに一般次元の境界つき微分可能多様体 M を用いて、微分可能写像

$$f : M \to X$$

に対して平行移動の概念を拡張する。次に、その‘ホロノミー写像’が Deligne コホモロジー群と Cheeger-Simons 群の同型を幾何的かつ具体的にコサイクルのレベルで与えることを示す。最後に、平行移動の高次元化を用いて、P. Deligne と J.-L. Brylinski-D. McLaughlin のアイデアを一般化し、一般次元の複素多様体のシンボルを構成し、それが Steinberg 関係式と高次の相互律を満たすことを示す。

平行移動の高次元化と古典的な場合との違いは二つある。まず、曲線を高次元化したことに対応して‘高次の接続’を導入する必要がある。ここで、Deligne が接続つきの直線束の同型類のなす群が 1 次元の Deligne コホモロジー群と同型であることを指摘したことにしたがって、‘高次の接続’として、一般次元の Deligne コサイクルを用いる。Deligne コホモロジー群は微分形式のなす層 $\underline{A}^k$ からなる複体

$$\underline{\mathbb{C}}^* \xrightarrow{d\log} \underline{A}^1 \to \underline{A}^2 \to \cdots \to \underline{A}^m$$

のハイパーコホモロジーとして定義され、例えば、接続つきのベクトル束の‘特性類’が Deligne コホモロジー群の元として得られ、曲率写像とよばれる Deligne コホモロジー群から微分形式への写像のもとでのその‘特性類’の像が通常の Chern-Weil 理論を用いて構成される微分形式に一致すると言う意味で、Deligne コホモロジー群は微分形式の精密化と考えられる。

二つめの決定的な違いは、古典的な場合のように局所的に微分方程式を解くことで高次元の平行移動を得ることが出来ない点にある。　つまり、古典的な場合は閉区間 $[0,1]$ を細かく小さな閉区間に分け局所的に微分方程式を解くことで平行移動を得ることができたが、一般の多様体 M を細かく分ける方法は多様で、しかもその過程で様々な多様体が'局所的'に現れる。それらの'局所的'な対象を同時に扱うための道具として Deligne コチェインの転入写像を構成した。構成のアイデアは単体の代わりに単体のフラッグを使うことである。つまり、微分形式の場合の古典的な転入写像に現れる最高次数のすべての単体の足しあげ

$$\int_M = \sum_{\sigma^m} \int_{\sigma^m}$$

をすべての単体のフラッグの足しあげ

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{\sigma^{m-i} \subset \cdots \subset \sigma^m} \int_{\sigma^{m-i}}$$

に置き換え、それと高次のホモトピー作用素を組み合わせることで Deligne コチェインの転入写像を得た。J.-L. Brylinski は Deligne コチェインの転入写像を M が S^1 の場合に構成し、一般の場合を問題として提出した。この問題を今のアイデアを用いて解決できた。

平行移動の高次元化は、Deligne コチェインの転入写像の特殊な場合として、次の 2 ステップで得られる。まず、Deligne コチェインの転入写像は、微分可能多様体 X の m 次元の各 Deligne コサイクルに対して、次元 m-1 の閉多様体から X への微分可能写像の空間上の接続つきの直線束を与える。したがって、次元 m の境界つきのコンパクト多様体 M について、境界の連結成分を $\{N_i\}$ とすると各 N_i に付随する直線束 $\mathcal{L}_i$ を制限写像 r_i で引き戻すことで、M から X への微分可能写像の空間上の直線束 $\mathcal{E} = \otimes_i r_i^* \mathcal{L}_i$ を得る。次に、Deligne コチェインの転入写像は直線束 $\mathcal{E}$ の大域的な切断 P を与える。連結成分 $N_1, \ldots, N_s$ に M から誘導される向きと逆の向きを、残りの連結成分 $N_{s+1}, \ldots, N_{s+t}$ に M から誘導される向きを入れると、各写像 $f : M \to X$ での切断 P での値はファイバーの間の写像

$$P_f : L_{1,r_1(f)} \otimes \cdots \otimes L_{s,r_s(f)} \to L_{s+1,r_{s+1}(f)} \otimes \cdots \otimes L_{s+t,r_{s+t}(f)}$$

を与えることが分かる。この線型写像が'曲線'f にそった高次元の平行移動である。

高次元の平行移動の最も重要な性質は、それが写像の貼り合わせと両立することである:

定理． 微分可能写像 $f_1 : M_1 \to X$ と微分可能写像 $f_2 : M_2 \to X$ が M_1 と M_2 の共通の境界の連結成分 N で一致するときに、写像 f_1 にそった'平行移動'と写像 f_2 にそった'平行移動'の合成は貼り合わされた写像 $f_1 \cup f_2$ にそった'平行移動'と一致する。

多様体 M が境界を持たない場合、写像 $f : M \to X$ にそった平行移動はファイバーの間の写像ではなく、'閉曲線'f の高次元のホロノミーと呼ばれる零でない複素数 Hol_f をあたえる。古典的なホロノミーが閉曲線 $\gamma : S^1 \to X$ の 2 次元円盤からの写像 $\tilde{\gamma} : D^2 \to X$ に拡張がある場合に写像 $\tilde{\gamma}$ にそった曲率形式の積分で表されることの類似として次の結果を得た。

定理． 写像 $f: M \to X$ が M を境界としてもつ $m+1$ 次元の多様体 B からの写像 $\tilde{f}: B \to X$ に拡張される場合に、写像 f にそった高次元のホロノミーは写像 $\tilde{f}$ にそった'曲率形式'の積分で表される。

このことからホロノミー写像が Deligne コホモロジー群から Cheeger-Simons の微分指標のなす群への写像を導くことが分かる。実際には、この写像が同型写像であることが示せる。そのような同型が存在するという事実は層の複体の擬同型を用いて知られており、今の構成はその事実にコチェインのレベルで具体的に幾何的な解釈を与える。Deligne コホモロジー群は Cheeger-Simons 群に比べて、コサイクルのレベルがあり、A. Beilinson による自然な積を持つという長所を持つ。この積は次の高次元の平行移動の応用、一般の複素多様体のシンボルの構成、で重要な役割を演じる。

リーマン面 Σ 上の二つの有理関数 f, g に対して、点 $p \in \Sigma$ での古典的なシンボル $\{f, g\}_p$ は零でない複素数であり、Steinberg 関係式

$$\{f, 1-f\}_p = 1$$

と相互律

$$\prod_{p \in \Sigma} \{f, g\}_p = 1$$

を満たす。P. Deligne はシンボル $\{f, g\}_p$ が有理関数 f と g に付随する接続つき直線束のホロノミーとして解釈できることを発見しこの事から Steinberg 関係式と相互律を導いた。J.-L. Brylinski と D. McLaughlin はこれを複素曲面に対してその上の三つの有理関数 f, g, h に対し接続つき直線束の類似として圏束 (gerbe) を構成しシンボルを与え、Steinberg 関係式と相互律の高次の類似を満たすことを示した。彼らの構成を直接的にさらに高次元の複素多様体に拡張するためには、高次の圏束 (gerbe) の概念が必要であり、現在のところそれは難しい。この問題を先程述べた高次元のホロノミーとして高次のシンボルを定義することで解消することができた。正確には次元 n の複素多様体 X 上の $n+1$ 個の有理関数 $f_0, \ldots, f_n$ でその因子の交わりが滑らかなものに対し、X の部分複素多様体のフラッグ $S_0 \subset \cdots \subset S_{n-1}$ でのシンボル $\{f_0, \ldots, f_n\}_{S_0 \subset \cdots \subset S_{n-1}}$ をこの有理関数に付随する Deligne コホモロジー類のホロノミーとして与える。大事な点はこの Deligne コホモロジー類が高次の接続として平坦、つまりその'曲率形式'が零であり、したがって'曲線'の滑らかな変形によらないことである。

定理． シンボル $\{f_0, \ldots, f_n\}_{S_0 \subset \cdots \subset S_{n-1}}$ は *Steinberg* 関係式

$$\{\ldots, f_i, \ldots, 1-f_i, \ldots\}_{S_0 \subset \cdots \subset S_{n-1}} = 1$$

と高次の相互律

$$\prod_{S_0 \subset \cdots \subset S_{n-1} \subset X} \{f_0, \ldots, f_n\}_{S_0 \subset \cdots \subset S_{n-1}} = 1$$

を満たす。ここで、各部分フラッグを拡張するすべてのフラッグの積をとる。

S.Bloch は古典的な相互律を用いて、二次元の Wess-Zumino-Witten 模型で中心的な役割をはたす（代数的な）ループ群の中心拡大を得て、さらにその中心拡大のための 2-コサイクルの高次の類似物が値写像のもとでの写像空間のコホモロジー類の引き戻しに対応するだろう事を示唆した。この論文で得られた高次のシンボルが、まだ確立していない高次元の Wess-Zumino-Witten 模型でどのような役割を演じるのかを調べることは興味深いと思われる。