論文の内容の要旨

論文題目　Hydrodynamic Limit for the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ Interface Model with a Conservation Law
(保存量を持つギンズブルグ-ランダウ $\nabla\phi$ 界面モデルに対する流体力学極限)

氏名　西川 貴雄

1　問題とその背景

2つの相を分離する界面のモデルとして、保存量をもつ場合の Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ 界面モデルを取り上げ、その流体力学極限について考える。

$\mathbb{Z}^d$ 上のスカラー場 ϕ は $\mathbb{R}^{d+1}$ 内に埋め込まれた離散的な超曲面 $\{(x,\phi(x)) \in \mathbb{R}^{d+1}; x \in \mathbb{Z}^d\}$ を定義する。あるいは、適当な補間をすることにより得られる連続超曲面と同一視して考えてもよい。言い換えれば、 $\phi(x)$ は格子点 x における超曲面の高さ (height) を与える変数である。物理的には、2つの相を分離する界面 (interface) を定めるものと解釈できる。超曲面 ϕ のもつエネルギーを与えるハミルトニアン $H(\phi)$ として

$$H(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d,\,|x-y|=1} V(\phi(x) - \phi(y)) \tag{1}$$

を採用したモデルを $\nabla\phi$ 界面モデルと呼ぶ。

この $\nabla\phi$ 界面モデルは、分子レベルで構成される界面を記述するモデルである。ところが、我々の目では分子一つ一つを見ることはできない。我々が観測するのは、それらが集団となって引き起こす巨視的な現象である。これはスケールの違いによって説明される。前者の微視的なモデルに対して、スケール変換を施し（視点を変えることに相当する）巨視的な現象を記述する方程式を導出することは流体力学極限と呼ばれている。

(1) のハミルトニアン $H(\phi)$ に対応して、様々な力学系、すなわち超曲面 ϕ の時間発展を導入することができる。例えば [2] では $H(\phi)$ の勾配流にラ

ンダムな揺動を加え、周期格子 $\Gamma_N \equiv (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ 上で確率微分方程式

$$d\phi_t^0(x) = -\frac{\partial H}{\partial \phi(x)}(\phi_t^0)\,dt + \sqrt{2}dw_t(x), \quad x \in \Gamma_N \tag{2}$$

を考えている。周期境界条件の下で系を考えたのである。ただし、$\{w_t(x); x \in \Gamma_N\}$ は独立な 1 次元ブラウン運動の族である。特に [2] では、微視的な系 ϕ_t^0 について拡散スケーリングを施し極限として現れる巨視的な系を調べ、二階の非線形偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}h^0(t,\theta) = \mathrm{div}\Big\{(\nabla\sigma)(\nabla h^0(t,\theta))\Big\}, \quad \theta \in \mathbb{T}^d \equiv [0,1)^d,\, t > 0 \tag{3}$$

を導出している。ここで、 $\sigma = \sigma(u)$ は表面張力 (surface tension) と呼ばれる関数であり、対応するギブス分布から定められる。この方程式は $\sigma(u) = \sqrt{1+|u|^2}$ のとき平均曲率流と呼ばれる方程式であり、例えば、反応拡散方程式に対する特異極限として得られることが知られている。

この系は時間発展に関し、保存量を持っていない。無限粒子系で言えば Glauber 力学に相当する系と考えられる。これに対して、同一のハミルトニアン (1) の下で、粒子数を保存量として持つ Kawasaki 力学に相当する系も考えることができる。そのような系は、微視的界面 ϕ に対する次の確率微分方程式により導入することができる：

$$d\phi_t(x) = \Delta_{\Gamma_N}\frac{\partial H}{\partial \phi(\cdot)}(\phi_t)(x)\,dt + \sqrt{-2\Delta_{\Gamma_N}}dw_t(x), \quad x \in \Gamma_N \tag{4}$$

ここで、 Δ_{Γ_N} は周期格子 Γ_N 上の離散的 Laplacian である。このとき、界面の体積 $\sum_{x\in\Gamma_N}\phi_t(x)$ が保存されることが、方程式の形からみてとることができる。この論文では、この力学系に対する流体力学極限を考えることにする。

[4] では数々の界面のモデルを扱っているが、その中で表面拡散 (surface diffusion) というモデルについても議論している。これは 2 つの金属が触れ合うことによって現れる界面を説明するモデルである。それぞれの相の体積は保存されており、従って相を構成する粒子は 2 つの相を分離する界面に沿って移動すると考えられる。ある基準とする超平面からみて、積み重なっている一方の相の粒子数を高さ変数として採用したモデルを考えると、このような微視的な現象が説明できるであろう。このようなモデルは SOS (<u>S</u>olid <u>O</u>n <u>S</u>olid) モデルと呼ばれる。力学系 (2) あるいは (4) は SOS モデルにおいて、空間的な構造は離散化したまま、その高さ変数のみを連続化して得られるモデルと考えることができる。

2 定式化と主定理

(4) の系を数学的に定式化し、主定理を述べることにする。微視的な界面 $\phi = \{\phi(x); x \in \Gamma_N\}$ の力学系を次の確率微分方程式で与える:

$$d\phi_t(x) = \sum_{y \in \Gamma_N, |x-y|=1} \{U_y(\phi_t) - U_x(\phi_t)\}\, dt + \sqrt{2} d\tilde{w}_t(x), \quad x \in \Gamma_N \tag{5}$$

ここで、 $\{\tilde{w}_t(x), x \in \Gamma_N\}$ は平均 0 、共分散

$$E[\tilde{w}_t(x)\tilde{w}_s(y)] = -\Delta_{\Gamma_N}(x,y) t \wedge s, \quad x, y \in \Gamma_N,\ t, s \geq 0,$$

を持つガウス過程で、ドリフト項の $U_x(\phi)$ は

$$U_x(\phi) := \frac{\partial H}{\partial \phi(x)} \equiv \sum_{y \in \Gamma_N, |x-y|=1} V'(\phi(x) - \phi(y)), \quad \phi \in \mathbb{R}^{\Gamma_N}$$

で与えられる。 (5) は (4) を正確に述べたものである。

この微視的な系に対して、巨視的な系を次のようなスケール変換により導入する：

$$h^N(t,\theta) = \sum_{x \in \Gamma_N} N^{-1} \phi_{N^4 t}(x) 1_{B(x/N, 1/N)}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^d \equiv [0,1)^d \tag{6}$$

ここで、 $B(\theta, a) = \prod_{\alpha=1}^d [\theta_\alpha - a/2, \theta_\alpha + a/2) \subset \mathbb{T}^d$ である。このモデルでは、空間に対して N^{-1} 、時間に対して N^4 のスケーリングが適合する。一般に用いられる、空間に対して N^{-1} 、時間に対して N^2 のスケーリング、いわゆる拡散スケーリングは適切ではないことを注意しておく。(5) の系は (2) に比べて、近接する粒子の間でより強い相互作用が働いた下で運動するため、平衡状態に達するまでに時間がより長くかかり、従ってスケーリング(6) が必要になると考えられる。

巨視的な系 $h^N(t,\theta)$ の $N \to \infty$ における極限として、どのような系が現れるかに興味がある。これを調べるにあたって、運動を記述する確率微分方程式 (5) に対していくつかの仮定をおく必要がある。まず、ポテンシャル V に対して、次の仮定をおく。

(V1) (微分可能性)　$V \in C^2(\mathbb{R})$

(V2) (対称性)　$V(\eta) = V(-\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}$

(V3) (狭義凸性)　定数 $0 < c_-, c_+ < \infty$ が存在して、任意の $\eta \in \mathbb{R}$ に対して $c_- \leq V''(\eta) \leq c_+$ が成立する。

また、(5) の初期条件 ϕ_0 に対して次のことを仮定する。

(I1) ある $h_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ が存在して、 $\lim_{N \to \infty} E\|h^N(0) - h_0\|^2_{H^{-1}(\mathbb{T}^d)} = 0$ が成立する。

(I2) 対応する巨視的配置の列 $\{h^N(0)\}$ は $\sup_{N\geq 1} E\|h^N(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} < \infty$ をみたす。

以上の仮定の下で、次の結果が得られた。

定理 1. (V1)-(V3), (I1)-(I2) を仮定する。このとき、任意の $t > 0$ に対し、$h^N(t)$ は初期条件 h_0 をもつ偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t,\theta) = -\Delta\Big[\mathrm{div}\Big\{(\nabla\sigma)(\nabla h(t,\theta))\Big\}\Big], \quad \theta \in \mathbb{T}^d, t > 0 \tag{7}$$

の一意的弱解 $h(t)$ に $H^{-1}(\mathbb{T}^d)$ の意味で収束する。つまり、任意の $t > 0$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} E\|h^N(t) - h(t)\|^2_{H^{-1}(\mathbb{T}^d)} = 0 \tag{8}$$

が成立する。

3 証明の方針

もしポテンシャル V が2次関数、つまりガウス型と呼ばれる $V(\eta) = \kappa\eta^2/2$ の場合は、単に部分積分をすることによって 方程式 (7) を導くことができる。ポテンシャルが2次でない場合には、非平衡統計力学においてよく知られている局所平衡の概念、つまり、局所的にみれば系は平衡状態に従っていることを証明し、それを用いて非線形項の処理をする必要がある。この局所平衡は、「巨視的レベルからみて小さく、微視的レベルからみて大きな領域の上で、そこでの系の時空平均は平衡状態を表す測度で積分したものに置き換えることができる」と数学的に定式化することができ、このような置き換えの後に巨視的な系を記述する方程式を導くことができるのである。

このような議論を行うためには、勾配場の平衡状態を表すギブス測度を完全に特徴付けておく必要がある。非保存系を扱った [2] では、力学系に対するエネルギー評価を基にして定常測度の一意性を証明し、それに基づいて定常測度であるギブス測度の一意性を示している。しかしながら、ここで扱っているモデルに対し同様の議論を行ってもうまく機能しない。そこでその代わりに、保存系に対応するギブス測度と非保存系に対応するそれとが、平行移動不変という範疇では一致することを証明した。この事実により、我々の問題は彼らが示したギブス測度の存在および一意性に関する結果に帰着することができる。ここでの結果は、 [2] よりも弱く、ギブス測度を特徴付けたことに限られるのであるが、[3] における議論を適用して流体力学極限を示す上では、これで十分である。

ギブス測度の特徴付けの後に、局所平衡が成立することを証明し、それを用いて方程式 (7) を導出する。[2] で行われている H^{-1} 法と呼ばれる一連の

議論に対して適切な修正を加えた上で、定理の証明を完成させた。彼らは L^2 ノルムを基礎にして議論しているが、今考えているモデルでは、 H^{-1} ノルムを基礎にするのが適切である。このノルムを用いて $h^N(t)$ および偏微分方程式 (7) の解 $h(t)$ に対する必要な評価を得た。このとき重要になるのが、[1] で証明されている表面張力 σ の凸性に関する結果である。

参考文献

[1] J.-D. Deuschel, G. Giacomin and D. Ioffe, *Large deviations and concentration properties for* $\nabla\varphi$ *interface models*, Probab. Theory Relat. Fields, **117** (2000), pp. 49-111.

[2] T. Funaki and H. Spohn, *Motion by mean curvature from the Ginzburg-Landau* $\nabla\phi$ *interface model*, Commun. Math. Phys., **185** (1997), pp. 1-36.

[3] M.Z. Guo, G.C. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan, *Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions*, Commun. Math. Phys., **118** (1988), pp. 31-59.

[4] H. Spohn, *Interface motion in models with stochastic dynamics*, J. Stat. Phys., **71** (1993), pp. 1081-1132.