論文審査の結果の要旨

氏名　西川貴雄

原子・分子といった微視的レベルにおける複雑な相互作用をもつ系から出発して、巨視的な現象の時間発展を記述する非線形偏微分方程式等を導く操作は流体力学極限とよばれる。流体力学極限は、非平衡統計力学における最も基本的な問題の一つであるが、1980 年代後半に Varadhan らによってきわめて広範囲の確率モデルに対して適用可能な一般的手法が提唱され、数学的基礎付けが与えられた。統計力学におけるもう一つの基本的な問題は、相転移の理解である。相転移が起こる状況の下では、2 つの相を分離する界面が現れる。

論文提出者西川が考察したのは、そうした界面の構造を微視的にモデル化して得られる、いわゆる $\nabla\varphi$ 界面モデルである。対応する時間発展として、いくつかの系を導入することができるが、それらはまとめて Ginzburg-Landau $\nabla\varphi$ 界面モデルとよばれる。このような時間発展のうち、保存則をもたない場合は舟木と Spohn によって研究された。彼らは、微視的な系に対して拡散型の時空のスケール変換を作用し極限をとれば、巨視的レベルにおける界面の時間発展が導かれ、それは異方的な平均曲率運動によって支配されることを証明した。

西川が提出論文で扱ったのは、微視的レベルにおける 2 つの相のそれぞれが体積を保存する場合である。いいかえれば、微視的には系は 2 種類の粒子（原子）からなるが、それぞれの種類の粒子の総和が常に保存されるという場合である。これは、例えば 2 種原子による合金のモデルとして用いられ、粒子の移動は界面の表面でのみ起こると考えてもよいから、表面拡散の問題とよばれることがある。このような現象をモデル化するに当たって、対象とする秩序変数として用いられるのは、高さ変数である。高さ変数とは、ある超平面を基準としてその上に（あるいはその下に）一方の種類の粒子が何個積み上げられているかを測ったものである。ただし、異種粒子が幾重にも重ね合わさるという、いわゆるハングアップはないものと仮定する。対象は粒子数だから高さ変数は整数の値をとる。このようなモデルは SOS モデルとよばれている。

$\nabla\varphi$ 界面モデルは SOS モデルの一種の連続版であり、高さ変数は実数値をとる。微視的レベルにおける時間発展は、非常に大きなサイズの確率微分方程式によって規定される。このような系に対して流体力学極限を示すには、高さ変数から決まる勾配場の時間発展に対応する平衡状態、いわゆる Gibbs 分布の族を完全に特徴付ける必要がある。しかしながら、舟木と Spohn が非保存系に対して用いたエネルギー評価およびカップリングの方法は、保存系に対してはうまく機能しない。保存則の影響により Gibbs 分布の族は広がり、問題がより複雑になるからである。しかし、西川は平行移動に関して

不変なクラスに限れば、保存則をもつ Gibbs 分布（いわゆるカノニカルな Gibbs 分布）は非保存系の時間発展についても可逆であることを示し、このことと舟木-Spohn の結果を組み合わせることにより Gibbs 分布の族を完全に特徴付けることに成功した。

保存則の影響により平衡状態に至る緩和時間は長くなり、したがって系の巨視的な挙動を観測するために必要な時空のスケール変換は $N^4 : N$ の割合になる。ただし N は空間のスケールを表す巨大な数である。拡散型スケール変換では $N^2 : N$ だから、これは系をより長時間にわたって観察する必要があることを示唆している。このようなスケール変換の極限として、西川は4階の放物型偏微分方程式を導いた。保存系を記述する方程式として、例えば Cahn-Hilliard 方程式が知られているが、西川が導いた方程式は、この方程式から特異極限を経て導かれるものと、異方性を除き基本的に一致する。あるいは、極限方程式は状態空間に H^{-1}-内積に基づいたリーマン構造を導入したときの、全表面張力を緩和する力学系であると考えることもできる。

なお参考論文では、非保存系に対する流体力学極限に関して、大偏差原理を証明している。

論文提出者西川は、平衡状態が長距離相関をもつ場合に4階の偏微分方程式を導くことに成功した。これは、平衡系の巨視的理論において重要な役割を果たす、いわゆる Wulff 形状の力学的な基礎付けへと道を開くものであり、今後の研究の進展が期待される。

よって、論文提出者西川貴雄は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。