論文内容の要旨

論文題目 Regular Projectively Anosov Flows with Compact Leaves
(コンパクト葉を持つ正則な射影的アノソフ流)

氏　　名 野田 健夫

3次元多様体上の余次元1の葉層構造は完全積分可能な接平面場とみなすことができ、他方接触構造はいたるところで積分不可能な接平面場として特徴付けられている。かように正反対の性質を持つ二つの対象であるが、研究の手法においていくつかの類似点が見られ、近年これらの関係性は多くの数学者たちに注目されてきている。なかでも Eliashberg と Thurston はコンフォリエーション (confoliation) の概念を導入することによって葉層構造と接触構造を統一的に扱うことに成功し、有向閉3次元多様体上の余次元1の C^2 級葉層構造は、$S^2 \times S^1$ 上の $S^2 \times \{*\}$ を葉とする積葉層を除いて、つねに正と負の接触構造で C^0 級近似することができる、ということを示した。

目下のところこの近似が常に変形、すなわち径数つきの平面場の族 $\{\xi_t\}$ によって表すことができるかどうかは分かっていないが、葉層構造が接触構造へ変形されるとき両者の関係はより深く理解されるといえる。Eliashberg と Thurston はこの変形のうち更に特別なものとして**線型変形** (linear deformation) というものも定義した。これは平面場の族 $\{\xi_t\}$ で、ξ_0 が葉層構造であり、ξ_t は $t > 0$ では正、$t < 0$ では負の接触構造を定めるようなもののことをいう。

三松佳彦氏は Eliashberg と Thurston の仕事に先立ってアノソフ葉層の線型変形を研究していた。アノソフ流の安定および不安定葉層は互いを定める1形式によって正と負の接触構造に線型変形されるのである。ここで得られる正と負の接触構造は、更に横断的に交わることもわかり、このような接触構造の組は**双接触構造** (bi-contact structure) と呼ばれる。つまり、アノソフ流の安定および不安定葉層は双接触構造に線型変形されるといえる。

では、双接触構造は常にアノソフ流に付随して得られるかというとそうではない。これを成り立たせるために三松氏はアノソフ流を一般化した**射影的アノソフ流** (projectively Anosov flow) を定

義した。実際、射影的アノソフ流には常に双接触構造が付随し、逆に双接触構造があれば必ずそれに接する射影的アノソフ流が存在することも示されている。ちなみに、同じ動機から Eliashberg と Thurston が定義した**等角的アノソフ流**（conformally-Anosov flow）も射影的アノソフ流と同値な流である。

アノソフ流と同様、射影的アノソフ流にも安定および不安定葉層という流で不変な平面場が定義される。しかしアノソフ流の場合とは異なり、これらの平面場は一般には C^0 級でしかなく、一意積分不可能な場合もありうるが、そのような平面場は通常の意味での葉層構造の定義からは外れてしまう。そこで葉層構造の接触構造への変形という観点から研究するには安定および不安定葉層が微分可能である場合を区別すべきであり、このようなものを**正則**（regular）であるという。正則な射影的アノソフ流についてはアノソフ流と同様、安定および不安定葉層が互いを定める 1 形式によって双接触構造に線型変形される。以下、主に正則な射影的アノソフ流のみを扱う。

射影的アノソフ流がアノソフ流と大きく異なる点のひとつに、安定および不安定葉層がコンパクト葉を持ちうるということが挙げられる。著者はかつて円周上の 2 次元トーラス束における正則な射影的アノソフ流を研究し、安定あるいは不安定葉層がコンパクト葉を持つ場合に関して分類を得た。具体的には、このような射影的アノソフ流は **$T^2 \times I$-モデル**と呼ばれる成分の有限和しかない。この $T^2 \times I$-モデルとは、$T^2 \times I$ 上に定まった正則な射影的アノソフ流で、二つの境界成分は安定および不安定葉層のコンパクト葉からなるものである。一方、著者と坪井俊氏との共同研究では円周上の 2 次元トーラス束あるいは双曲閉曲面上の単位接束における正則な射影的アノソフ流で安定および不安定葉層がどちらもコンパクト葉を持たない場合について研究し、そのような流が実はアノソフ流であることを示した。特に、円周上の 2 次元トーラス束における正則な射影的アノソフ流に関しては完全な分類が与えられたことになる。

以上の結果をふまえて、正則な射影的アノソフ流の分類に関して次のような予想を立てることができよう。

予想　有向閉 3 次元多様体上の正則な射影的アノソフ流は次のいずれかである。

1. 安定および不安定葉層がコンパクト葉を持ち、$T^2 \times I$-モデルの有限和として表される。
2. 安定および不安定葉層はコンパクト葉を持たず、実はアノソフ流である。

このうち、$T^2 \times I$-モデルはその定義から円周上の 2 次元トーラス束にしか存在し得ないし、また正則なアノソフ流は E. Ghys によって分類されており、2 次元トーラスの双曲自己同相写像の懸垂か準フックス流（quasi-Fuchsian flow）かのいずれかである。準フックス流が存在する多様体は有限被覆をとれば双曲閉曲面上の単位接束になるので、上記予想に現れる流はおおむね既知の部分的解決に出てきている。従って、予想の正当性を示すには、他の多様体における正則な射影的アノソフ流の非存在を証明していくことが中心になろう。

次の定理はこの論文の主結果であり、予想に新たな部分的解決を加えることになる。

定理　有向閉ザイフェルト多様体上の正則な射影的アノソフ流で安定あるいは不安定葉層がコンパクト葉を持つものは $T^2 \times I$-モデルの有限和として表される。特に、そのような流はザイフェルト多様体では 3 次元トーラス上にしか存在しない。

坪井俊氏は有向閉ザイフェルト多様体上の正則な射影的アノソフ流は安定および不安定葉層がコンパクト葉を持たないならば準フックス流であることの証明の着想を得ていると著者に語った。これを考えると、上記の予想はザイフェルト多様体に関しては正しいということがいえそうである。

以下、主定理の証明の概略を述べる。

まずはじめに、安定および不安定葉層の位相を知るためにザイフェルト多様体上の葉層構造の性質を調べる。閉曲面上の円周束におけるコンパクト葉を持たない余次元1の葉層構造はイソトピーによりファイバーに横断的にできるということを Thurston が学位論文で示し、この結果はさらに Levitt、Eisenbud-Hirsh-Neumann、松元重則氏によって多くのザイフェルト多様体に対して拡張されてきた。与えられた仮定を満たす安定および不安定葉層の位相を調べるためには、コンパクト葉がある場合に関して同種の定理を得なくてはならない。具体的には次の定理を示した。

定理　有向閉ザイフェルト多様体で円周上の2次元トーラス束やクラインの壺上の非自明閉区間束の和ではないものを考える。この上に存在する余次元1の葉層構造がコンパクト葉を持ち、更にそのコンパクト葉はすべて圧縮不可能な2次元トーラスであり、すべてのコンパクト葉の線型ホロノミー群が非自明であるとする。すると、このような葉層構造はイソトピーによって次を満たすものに変形できる。

1. すべてのコンパクト葉はファイバーの和集合
2. コンパクト葉の外側ではファイバーに横断的

次に、安定葉層のコンパクト葉と不安定葉層のコンパクト葉は交わらないことを示す。コンパクト葉が交わると仮定すると、前定理より交わりがファイバーにイソトピックな閉軌道を含むことが分かり、このような閉軌道のホロノミーを比較することによって矛盾を導くことができる。

最後に、多様体をコンパクト葉で切り離すと各連結成分が $T^2 \times I$-モデルになることを示す。証明は安定および不安定葉層の葉空間、そして流の軌道空間を調べることによって得られる。この論法は Ghys によって行われ、さらに Barbot、Fenley らによって発展したものである。

この論文では主結果のほかに以下に述べる二つの新しい結果を得ている。

一つは閉曲面上の円周束での双接触構造の具体的構成である。すべての有向閉3次元多様体上に双接触構造が存在することは三松氏によって示されていたが、その証明は具体的な構成法を示唆せず、実際に知られていた例は限られていた。この論文で与えた双接触構造の構成法は二つの多様体上の双接触構造を貼り合わせることによって得られるもので、この方法は閉曲面上の円周束だけでなく多くの多様体上に具体例を与えることになる。

もう一つは**半正則**な（semi-regular）射影的アノソフ流の定義である。これは安定あるいは不安定葉層のどちらか一方が微分可能であるような射影的アノソフ流を意味する。ここでは定義のほかに、3次元トーラス上の正則な射影的アノソフ流の安定および不安定葉層はコンパクト葉を持つ、という既知の事実に簡略化された別証明を与えている。