論文の内容の要旨

論文題目　Gibbs measures on $C(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$ – an application for hard-wall Gibbs measures on $C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ –
(和訳：$C(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$ 上のギブズ測度 – $C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 上のハードウォールギブズ測度への応用 –)

氏名　針谷 祐

この論文の目的の一つは，infinite-volume の path 空間 $C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 上に相互作用を持つ“正に条件付けた”Gibbs 測度を構成することである．

Gibbs 測度とは，Ising ferromagnet といった統計力学上のモデルの定常状態を記述するために導入された概念であり，1970 年を前後して，R.L. Dobrushin や D. Ruelle らによりその厳密な数学的意味付けが成された．その研究は，R. Lang の 1977 年の研究に端を発する無限粒子系のような離散モデルの解析とともに発展してきており，それらの系の定常状態は与えられた相互作用に関する Gibbs 測度によって記述される．

一方，連続モデルである path 空間 $C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ の場合には，

$$\mathcal{H}(X) = \frac{1}{2}\int (\nabla X(s))^2\,ds + \int \varphi(X(s))\,ds + \frac{1}{2}\iint \psi(s-t, X(s)-X(t))\,dsdt, \qquad X \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}),$$

を Hamiltonian とする Gibbs 測度 μ が，1999 年になって長田-Spohn [9] によりこの空間上に構成された．ここに φ は external potential と呼ばれ path の存在領域を制限する外力項であり，ψ は path 自身の相互作用を表す interaction potential である．冒頭に述べた“正に条件付ける”とは，potential の言葉で言えば，

$$\varphi(x) = \infty, \quad x < 0,$$

という external potential (hard-wall external potential) を考えることに対応している．この potential の下 path の値は $\mathbb{R}^+$ に制限される．[9] では，φ についてある種の symmetry を仮定しており，このような hard-wall の場合が扱えなかった．

本論文において筆者は，interaction potential が空間変数について 2 次以下の増大度のとき，external potential φ が $x \geq 0$ において 2 次の漸近挙動を持つ hard wall であれ

ば対応する Gibbs 測度が存在することを示した (Theorem 2.2, Corollary 2.2). ここで注意すべきは, hard-wall external potential の下, path の挙動は反射壁 Brown 運動では記述されない, という点である. 事実, 論文内でも指摘した通り

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha^2 x^2, & x \geq 0 \quad (\alpha > 0), \\ \infty, & x < 0, \end{cases}$$

という external potential の下では, path X は

$$X(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\alpha t} W^{(3)}(e^{2\alpha t}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

と, 3 次元 Bessel 過程 $W^{(3)}$ を用いて記述される. これは, 格子上の spin 系のような離散モデルにおいて近年 J.L. Lebowitz, J.D. Deuschel らによって研究されている entropic repulsion [4, 1] の効果が連続モデルにおいても表れた結果であると考えている. このような hard-wall Gibbs 測度の存在が得られたことの応用例の一つとして, interaction が下の(3) の形で与えられるときは, 対応する Gibbs 測度が存在するための external potential の条件が極めて緩められるということが挙げられる. 実際, 論文内でも述べたとおり (Corollary 4.1), 局所的には measurable 程度で十分であるということが確かめられる.

さて, Gibbs 測度の存在を論じる際, 与えられた potential の下 path の挙動が局所化される, 即ち localization が起こる, ということを示すのが極めて重要となる. ところで(1) の observation から, $C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 上の hard-wall Gibbs 測度の localization は, $C(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$ 上に定義される Gibbs 測度の localization の $d=3$ の場合として得られることが見て取れる. そこで論文では一般の d 次元の場合の localization を導出しており (Theorem 2.1), 更にそれ自体から得られる $C(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$ 上の Gibbs 測度の存在定理も, 既存の [9] や Lőrinczi-Minlos [6] の結果に含まれないものとなっている. このことを次のような interaction potential を例にとって見てみよう:

$$\psi(s-t, X(s)-X(t)) = -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varrho}(\lambda)|^2}{\omega(\lambda)} e^{-|s-t|\omega(\lambda)} \cos(\lambda \cdot (X(s)-X(t)))\, d\lambda. \tag{2}$$

ここに ϱ と ω は予め与えられた適当な関数で, $\hat{}$ は Fourier 変換を表す. 尚, これは quantum physics の Nelson's scalar field model と呼ばれるモデルに現れる interaction である ([7]). [9] で扱える interaction は ferromagnetic なもの, 即ち

$$\psi(s-t, X(s)-X(t)) = \rho(s-t)v(X(s)-X(t)) \tag{3}$$

のように表されかつ ρ が非負, v が convex であるものに限られる. 従って(2) は扱えない. また, [6] では, (2) は扱えるものの, external potential の増大度が 2 次よりも真に大きい (= 2 次に比べてより localization が起こりやすい) 場合かつ ψ に掛けられる coupling constant が十分小さい場合に限られる. 一方, 本論文の存在定理を適用すれば, external potential の増大度は 2 次でよく, 尚かつ coupling constant の大きさに関わらず対応する Gibbs 測度の存在が示されることが分かる.

本論文において (d 次元の場合の) localization を導出する際のポイントは, (deterministic な) 部分積分を用いる点で, これは [9] のある種の monotonicity に依った議論や, [6] の cluster expansion を用いた議論とは全く異なる.