論文審査の結果の要旨

氏名　針谷祐

ユークリッド空間のように連続的な空間の上で定義されたランダム場は、例えば量子場の理論等に関係して長く研究されてきた。特に2次元の量子場理論は $P(\phi)_2$ 理論とよばれ、数学的には $\mathbb{R}^2$ 上の超関数のクラスの上に確率測度を定める問題として定式化される。それに対して1次元の場合、つまり $P(\phi)_1$ 理論では、ランダム場のサンプルは連続関数になることが知られている。したがって、問題はパス空間 $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 上の確率測度、より正確にいえば $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 上の Gibbs 測度を定めることに帰着される。従来、量子場の理論等に関連して研究されてきたのは、$\mathbb{R}$ 上の Dirichlet 形式に類似の形をした微分作用素によって与えられる最近接相互作用項に自由ポテンシャル項を加えた場合が主であった。しかし、長田と Spohn は最近、離れた2点間におけるパスの相互作用の効果を2重積分として取り込んだ相互作用ポテンシャル項を付け加えても、Gibbs 測度が構成できることを証明した。ただし、ポテンシャル関数に対するある種の制限が必要であった。

このような状況のなかで、論文提出者針谷は新たな方法を開発し、かなり一般的な枠組みの下で $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 上の Gibbs 測度を構成することに成功した。針谷の結果を適用することにより初めて構成が可能になった例として、Nelson のスカラー場モデルと剛体壁の2つの場合をあげることができる。Nelson のスカラー場モデルにおける解析の困難は、相互作用ポテンシャルが凸性をもたないことにあった。最近、Minlos らは相互作用ポテンシャルが十分小さいとき、つまりポテンシャルの前にパラメーターを置きそれが十分小さいときに、クラスター展開の手法を用いて Gibbs 測度を構成したが、針谷の結果は相互作用ポテンシャルの強さに対する制限を全く必要とせず、Minlos らの結果を完全に含むものであって高く評価することができる。

一方、原点に剛体壁が置かれた場合、自由ポテンシャルは場の値が負のとき $+\infty$ になる。これは、ランダム場が常に非負値であることを意味し、ポテンシャルの特異性のために従来の方法は適用できなかった。しかし、針谷は巧妙な変換を導入することによって、問題を場の値が3次元であってかつポテンシャルが滑らかであるような場合に帰着させ、Gibbs 分布の構成問題を解決した。この手法は同時に Nelson のスカラー場モデルに対しても適用可能であったのである。

これまで一般に、相互作用ポテンシャルをもつ無限体積 Gibbs 測度を構成する方法として、(1) Ruelle の超安定性評価 (superstability estimates)、(2) クラスター展開、(3) 対数型凹不等式や FKG 不等式などの単調性不等式、(4) 確率偏微分方程式、などの手段を用いることが行われてきた。しかしながら、手法 (1) は基礎空間が離散のときや粒子系

に対しては有効であるが、パス空間上の測度の構成には適用できない。最近接相互作用による相関が非常に強いからである。すなわち、パス空間のときは基礎測度としてピン止め Wiener 測度を用いるが、それは離散空間における Bernoulli 測度や粒子系の場合の Poisson 測度がもつ独立性を欠くのである。手法 (2) を用いると相互作用ポテンシャルが十分小さいという制約が必要になる。手法 (3) はポテンシャルの凸性が必要になるものの、その大きさは任意でかまわない。しかし、剛体壁の場合には適用できなかった。手法 (4) も、係数の滑らかさやある種の凸性が必要で (3) とほぼ同じ範疇でしか適用できない。

このように、手法 (1) によって通常得られるような極めて一般的な結果を、パス空間上の Gibbs 測度に対していかにして証明するのか、ということが重要な問題として残されていた。論文提出者針谷は、既に述べたような 3 次元への変換や部分積分といった手法を用いるという独自のアイデアに基づいて、この問題をみごとに解決することに成功したのである。その結果、単に可測というカテゴリーの関数や凸でない関数などをポテンシャルに付け加えることも可能にした。

参考論文では、パス空間に値をとる無限次元拡散過程を構成した。これは、パスのランダムな運動を記述する確率過程で、この論文では Dirichlet 形式理論に基づいて非常に一般的な結果を証明している。Dirichlet 形式理論を用いる以上、得られた結果が特異なポテンシャルをカバーすることが求められるが、この論文は典型例として剛体壁の場合を含むのである。今後、構成された拡散過程について、流体力学極限、スペクトル・ギャップ、エルゴード性など、系の巨視的な性質に関する様々な問題が考察の対象となると期待される。

以上のような理由により、論文提出者針谷祐は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があるものと認める。