論文の内容の要旨

論文題目 Local Constants in Torsion Rings

(トーション係数の局所定数)

氏名　安田　正大

背景. 大域体 F の 複素 Galois 表現 (ρ, V) に対する Artin の L-関数 $L(V,s)$ は無限因子も付け加えると関数等式

$$L(V,s) = \epsilon(V,s)L(V^*, 1-s)$$

を持つが, ここに現れる $\epsilon(V,s)$ はある定数 a, b, に対して, $\epsilon(V,s) = ba^{-s}$ の形をしている. a, b のうち, a の方は, 表現の Artin 導手 $a(V)$ に等しい. しかし, もう一方の値 b の統一的な記述は難しい.

V が 1 次元の場合, 大域類体論により, (ρ, V) はイデール類群の表現とみなせる. イデール群上の調和解析により, アデール上の非自明な指標であって F 上自明なものを補助的にとると, $\epsilon(V,s)$ は局所的な関数 $\epsilon(V_v, \psi_v, s)$ の積に分解する. (v は F の素点. 簡単のため, Haar 測度の部分は省略して書く). $\epsilon(V_v, \psi_v, s)$ は V の F_v のガロア表現への制限、および F_v の加法指標 ψ_v にしか依存せず, F に依存しない. さらに定数 $\epsilon(V_v, \psi_v)$ によって、$\epsilon(V_v, \psi_v, s) = \epsilon(V_v, \psi_v) q_v^{-s(a(V)+\mathrm{ord}\psi)}$ と表される (ここで q_v は v の剰余体の位数, $\mathrm{ord}\psi$ は ψ の導手である.)

Dwork, Langlands および Deligne により、V が一般次元の場合にも, $\epsilon(V_v, \psi_v)$ が一般化され, $\epsilon(V_v, \psi)$ の, すべての v にわたる積をとると $L(V,s)$ の関数等式の定数と結びつく.

以下では, 局所 ϵ-定数のみを考察する. 記号を変えて K を非アルキメデス局所体, すなわち完備離散付値体であって, 剰余体 k が有限体のものとする. 以下この K を固定する.

体 k の標数を p, k の位数を q とする. $\mathcal{O}_K$ を K の整数環, $v_K : K^\times \to \mathbb{Z}$ を正規化された K の指数付値とする.

W_K を K の Weil 群, $\mathrm{rec} : K^\times \to W_K$ を局所類体論による写像とする. ただし, K の素元と, W_K の幾何学的フロベニウスとが対応するように正規化しておく.

ℓ を p と異なる素数とする. Deligne は論文 [D] において, W_K の ℓ-進連続表現 V に対しても $\epsilon(V, \psi)$ を定義している. ℓ-進表現を考える場合, $\epsilon(V, \psi)$ を少し修正した $\epsilon_0(V, \psi)$ を考察したほうが都合がよいことがわかる. この $\epsilon_0(V, \psi)$ を (V, ψ) の ϵ_0-定数と呼ぶことにする.

主結果

本論文の目標は, より一般の環上の, 必ずしも標数 0 に持ち上がるとは限らない W_K の連続表現に対し, 局所 ϵ_0-定数を定義することである.

R を, noether 局所環であって, 次の 2 条件をみたすものとする：

- R の剰余体は, 標数が p と異なる代数閉体.
- p 乗写像 $R^\times \to R^\times$ は単射でなく, かつ全射.

上記の性質をみたす環 R, に対し, $\mathrm{Rep}(W_K, R)$ を, 有限生成自由 R-加群上における W_K の表現のなす圏とする. R, $\mathrm{Rep}(W_K, R)$ の対象 (ρ, V) および非自明な連続準同型 $\psi : K \to R^\times$ からなる 3 つ組 $(R, (\rho, V), \psi)$ を考える.

本論文の主結果は, 以下のものである.

定理 1 上記の各 3 つ組 $(R, (\rho, V), \psi)$ に対し, R の可逆元 $\epsilon_{0,R}(V, \psi)$ であって, 以下の 7 性質をみたすものを標準的に構成できる:

1. $\epsilon_{0,R}(V, \psi)$ は $(R, (\rho, V), \psi)$ の同型類にしか依存しない.
2. $(R, (\rho, V), \psi)$, を上記の 3 つ組, R' を上記の条件をみたす新たな環, $h : R \to R'$ を局所環準同型とする. このとき,
$$h(\epsilon_{0,R}(V, \psi)) = \epsilon_{0,R}(V \otimes_R R', h \circ \psi)$$
が成り立つ.
3. 共通の R, ψ をもつ 3 つの 3 つ組 $(R, (\rho, V), \psi)$, $(R, (\rho, V'), \psi)$, $(R, (\rho, V''), \psi)$ であって, $\mathrm{Rep}(W_K, R)$ 内の短完全系列
$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$
が存在するものに対し,
$$\epsilon_{0,R}(V, \psi) = \epsilon_{0,R}(V', \psi) \cdot \epsilon_{0,R}(V'', \psi)$$
が成り立つ.
4. $(R, (\rho, V), \psi)$ を上記の 3 つ組とし, さらに R を体と仮定する. このとき,
$$\epsilon_{0,R}(V, \psi) = \epsilon_0(V, \psi, dx)$$
が成り立つ. ここで dx は K の R-値 *Haar* 測度であって, $\mathcal{O}_K$ の測度が 1 のもの.

5. $(R,(\rho,V),\psi)$ を上記の 3 つ組とし, さらに V の階数が 1 であると仮定する. このとき,

$$\epsilon_{0,R}(V,\psi)=\epsilon_0(\rho\circ\mathrm{rec},\psi,dx)$$

が成り立つ. ここで右辺は *Deligne [D, 6.4]* で定義された局所定数, dx は K の R-値 *Haar* 測度で $\mathcal{O}_K$ の測度が 1 のものである.

6. $(R,(\rho,V),\psi)$ を上記の 3 つ組とする. $a\in K$ に対し, 新たな加法指標 $\psi_a:K\to R^\times$ を $\psi_a(x)=\psi(ax)$ により定める. このとき,

$$\epsilon_{0,R}(V,\psi_a)=\det(\rho)(\mathrm{rec}(a))q^{v_K(a)\mathrm{rank}(V)}\epsilon_{0,R}(V,\psi)$$

が成り立つ.

7. $(R,(\rho,V),\psi)$, $(R,(\sigma,W),\psi)$ を, 共通の R, ψ をもつ 2 つの 3 つ組とする. さらに W を不分岐と仮定する. このとき,

$$\epsilon_{0,R}(V\otimes W,\psi)=\det\sigma(\mathrm{Frob}_q^{\mathrm{sw}(V)+\mathrm{rank}(V)\cdot(\mathrm{ord}\psi+1)})\cdot\epsilon_{0,R}(V,\psi)^{\mathrm{rank}W}$$

が成り立つ. ここで $\mathrm{Frob}_q\in W_K$ は幾何学的 *Frobenius,* $\mathrm{sw}(V)$ は V の *Swan* 導手.

以下に定理の証明の方針を述べる. $(R,(\rho,V),\psi)$ を上記の 3 つ組とする. V は tame な表現 V^0 と totally wild な表現 $V=V^{>0}$ との直和に一意的に分解する. V^0, $V^{>0}$ の各々に対して $\epsilon_{0,R}(V^0,\psi)$, $\epsilon_{0,R}(V^{>0},\psi)$ を定義し, 最後に $\epsilon_{0,R}(V,\psi)$ を

$$\epsilon_{0,R}(V,\psi)=\epsilon_{0,R}(V^0,\psi)\cdot\epsilon_{0,R}(V^{>0},\psi)$$

によって定める.

まず $\epsilon_{0,R}(V^{>0},\psi)$ の構成について述べる. 斎藤 [S] による, refined slope 分解により, V が純粋な refined slope を持つ場合に帰着される. $\mu\subset R^\times$ を, R における 1 の p-巾乗根全体のなす群とする. さらに Henniart [H], および斎藤 [S] により, $\epsilon_{0,R}(V,\psi)$ の R/μ における値 $\bar{\epsilon}_{0,R}(V,\psi)$ は, V の refined slope および 2 次の Gauss 和を使って表される. この表示を用いて, R が一般の場合にも $\bar{\epsilon}_{0,R}(V,\psi)$ を定義し, さらに $\epsilon_{0,R}(V,\psi)\in R^\times$ を, $\mathrm{mod}\ \mu$ で $\bar{\epsilon}_{0,\psi}(V,\psi)$ に一致し, さらに R の剰余体 k_R 上で $\epsilon_{0,k_R}(V\otimes k_R,\psi)$ に一致するただ 1 つの元として定義する.

次に $\epsilon_{0,R}(V^0,\psi)$ の構成について述べる. K を等標数としてよい. V を, $\mathrm{Rep}(W_K,R)$ の対象とする. 簡単のため, R に有限部分環 R_0 が存在して, V が R_0 定義されていると仮定する. このとき, V に付随して, $\mathbb{G}_{m,k}$ 上の smooth R_0-層 $\widetilde{V}$ が定まる. R_0 に 1 の原始 p-乗根が存在するとし, 非自明な加法指標 $\phi_0:k\to R_0^\times$ をひとつ取ると, ϕ_0 に付随して, $\mathbb{A}^1$ 上に Artin-Scheier 層 $\widetilde{\mathcal{L}}_{\phi_0}$ が定まる. $\epsilon_{0,R}(V,\psi,\phi_0)\in R^\times$ を, $\widetilde{V}\otimes\widetilde{\mathcal{L}}_{\phi_0}|_{\mathbb{G}_m}$ に対して積公式が成り立つように定める. 最後に, $\epsilon_{0,R}(V,\psi,\phi_0)$ が ϕ_0 の取り方に依存しないことを示す.

以上のようにして, $\epsilon_{0,R}(V^0,\psi)$, $\epsilon_{0,R}(V^{>0},\psi)$ を定義すると, これらが定理に記述された性質を満たすことは比較的容易に示される.

加藤の予想. 応用として, 論文 [K] において, 予想されている, 局所 ϵ 元の存在を証明することができる. 以下, [K] とほぼ同じ記号を用いて, 局所 ϵ 元について復習する.

ℓ を p と異なる素数とする. $\mathbb{F}_\ell$ を位数 ℓ の有限体, $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ を $\mathbb{F}_\ell$ の代数的閉包, $W(\overline{\mathbb{F}_\ell})$ を $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ 上の Witt ベクトルのなす環とする. Pro-ℓ 局所環 Λ, $\mathrm{Rep}(W_K, \Lambda)$ の対象, (ρ, V), および非自明な連続加法指標 $\psi : K \to W(\overline{\mathbb{F}_\ell})^\times$ (Λ, V) からなる 3 つ組 $(\Lambda, (\rho, V), \psi)$ について考える.

このような 3 つ組 $(\Lambda, (\rho, V), \psi)$ に対し, Λ の乗法群 $\Lambda^\times$ の元 a_V を

$$a_V = \det(\rho)(\mathrm{rec}(\ell)) \in \Lambda^\times$$

により定める. 可逆 Λ-加群 Λ_V を

$$\Lambda_V = \{x \in \Lambda \widehat{\otimes}_{W(\mathbb{F}_\ell)} W(\overline{\mathbb{F}}_\ell) \ ; \ (1 \otimes \varphi)(x) = (a_V \otimes 1)x\}$$

により定める. (ここで φ は Frobenius.)

プレプリント [K] において, 加藤は, 可逆 Λ-加群

$$\Delta_\Lambda(V) = \det_\Lambda R\Gamma(K, V) \otimes_\Lambda \Lambda_a$$

の基底 $\epsilon_{\Lambda,\psi}(V)$ であって, いくつかのよい性質を満たし, Deligne の局所定数と関係するものの存在を予想し, それを $(\ell \neq p$ に対する$)$ 局所 ϵ 予想と呼んだ.

系 2 *($\ell \neq p$ に対する) 局所 ϵ 予想は正しい.*

実際, $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} W(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ は, § の条件をみたす有限個の Noether 局所環 R_i の直積となり, 局所 ϵ 予想は各 R_i に対して, 定理 1 の主張 $1-6$ をみたす $\epsilon_{0,R_i}(V, \psi)$ が存在するという命題（の ± 1 倍を無視したもの）と同値である.

Tame な局所 ϵ_0-定数の積分表示. $G = W_K/(W_K)^{0+}$, $I = (W_K)^0/(W_K)^{0+}$ とおく.p と素な自然数 n に対し, $[n] : \mathbb{G}_{m,k} \to \mathbb{G}_{m,k}$ を n 乗写像とする. $H^1_c(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, [n]^* \widetilde{\mathcal{L}}'_{\phi_0})$ の逆極限をとることにより, 完備群環 $R[[I]]$ 上の階数 1 の自由加群 $\widehat{W}$ であって, G が半線型に作用するものが構成される. 幾何学的 Frobenius の持ち上げ $\widetilde{\mathrm{Frob}} \in G$ を 1 つ定めると, $\widetilde{\mathrm{Frob}}$ の “固有値” u が G-coinvariant $(R[[I]]^\times)_G$ の元として定まる. すると $\epsilon_{0,R}(V, \psi)$ は次の形の積分表示を持つことが示される.

定理 3 *u を $\widehat{u} \in R[[I]]$ に勝手にもちあげ, $\widehat{u}$ を I 上の distribution とみなす. $\psi : K \to R^\times$ を導手 -1 の加法指標であって, 任意の $x \in \mathcal{O}_K$ に対し $\psi(x) = \phi_0(\mathrm{rec}^{-1}(\widetilde{\mathrm{Frob}}^{-1})x)$ が成り立つものとする. このとき, 有限生成自由 R-加群上の, W_K 任意の tame な表現 (ρ, V) に対し,*

$$\epsilon_{0,R}(V, \psi) = \det\left(\int_{g \in I} \rho(g)^{-1} d\widehat{u}(g)\right)$$

が成り立つ.

誘導表現に対する局所 ϵ_0-定数の公式.

さらに本論文では, 誘導表現に対する局所 ϵ_0-定数に関する次の公式も証明している.

定理 4 L を K の有限次分離拡大, R を上記のような環, $\psi : K \to R^\times$ を非自明な連続加法指標とすると, 定数 $\lambda_R(L/K,\psi) \in R^\times$ が存在して, 有限生成自由 R-加群上の W_L の任意の表現 V に対し,

$$\epsilon_{0,R}(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} V,\psi) = \epsilon_{0,R}(V,\psi \circ \mathrm{Tr}_{L/K}) \cdot \lambda_R(L/K,\psi)^{\mathrm{rank} V}$$

が成り立つ. さらに $\lambda_R(L/K,\psi)$ は局所環準同型 $h : R \to R'$ と *compatible.*

以下この定理の証明を述べる. V が tame の場合と V が totally wild のときとに分けて考える.

まず V が totally wild の場合について述べる. R が体であれば, 上記定理の成立は容易にわかるので R/μ において等式を示せばよい. $\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} V$ の refined slope 分解を, L/K に非自明な中間体が存在しない場合に精密に調べることによって, 2 次の Gauss 和に関する式に示すことに帰着される. R が標数 0 の体の場合には定理が成り立つことから, この Gauss 和に関する式が従う.

次に V が tame の場合を考える. L/K が完全分岐かつ分岐指数が p 巾の場合は, V が totally wild な場合と同じ方法で定理が示される. L/K が不分岐であれば定理は容易に示せるので, L/K は完全分岐かつ tame としてよい. この場合, 定理の主張は, 積分表示のところで出てきた $\widehat{W}$ または $\tilde{u}$ に関する命題に帰着される. 最後に, エタールコホモロジーの determinant を計算することで, 命題が証明される. 本論文では, Deligne-Henniart [DH] の結果の $\epsilon_{0,R}(V,\psi)$ に対する類似も与えている.

参考文献

[D] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, in Modular functions in one variable II, 501-597, Lecture Notes in Math. 349, Springer, Berlin (1973).

[DH] P. Deligne, G Henniart, *Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'?quations fonctionnelles de fonctions L*, Invent. Math. **64** (1981), no. 1, 89-118.

[H] G. Henniart, *Galois ϵ-factors modulo roots of unity*, Invent. Math. **78** (1984), 117-126.

[K] K. Kato, *Lectures on the appoach to Iwasawa theory of Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. Part II. Local main conjectures*, preprint.

[S] T. Saito, *Ramification groups and local constants*, UTMS preprint 96-19, University of Tokyo (1996).