論文審査の結果の要旨

氏名 安 田 正 大

安田君は本論文において, 局所体の Galois 表現に関する局所定数の理論を一般のねじれ局所環係数の場合へと拡張した。

この研究の背景は次のとおりである. 局所体 $K$ の絶対 Galois 群 $G_K$ の連続表現 $V$ を考える。$V$ が $G_K$ の複素表現, $\ell$ 進表現, $\ell$ を法とする表現の場合には, Dwork, Langlands, Deligne らにより局所定数の理論が構成されている. これは補助的に $K$ の加法的指標 $\psi$ と $K$ の Haar 測度 $dx$ をとると, $V$ に対し数 $\epsilon(V, \psi, dx)$ を定めることができるというものである。これは $V$ が大域体の Galois 表現の制限として得られる場合には, 積公式の予想により, $V$ の $L$ 関数の関数等式に現れるものと考えられている. また最近証明された局所 Langlands 予想の定式化にも現れる重要な不変量である.

従来は, この局所定数の理論は, 上でのべたように, 体上の表現に対してしか構成されていなかった. 安田君は, たとえば $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ の最大不分岐拡大のようなより一般の局所環に対してもこの理論が拡張されることを示した. この結果の帰結として, Galois 群の表現の変形にたいし, 局所定数が連続的に変化することがわかる. またこの拡張された局所定数に対しても, 従来のものと同様に誘導表現についての公式がなりたつなどの基本的な性質を証明している. さらに論文提出後ではあるが, 関数体の場合にこの論文で定義された局所定数を使って, $L$ 関数の関数等式の定数項に対する積公式も示した. これは従来の理論の自然な拡張であり, 今後の応用も期待されるものである.

論文の内容は次のとおりである. この論文では, 係数環として, 剰余体が局所体 $K$ の剰余体の標数 $p$ と素な標数の代数閉体であるような局所環 $R$ で, $p$ 乗写像 $R^\times \to R^\times$ が全射であるようなものを考えている. 局所体 $K$ の絶対 Galois 群 $G_K$ の, 有限生成自由 $R$ 加群 $V$ と非自明な加法的連続指標 $\psi : K \to R^\times$ に対し, $\epsilon_{0,R}(V, \psi) \in R^\times$ が定義され, 次の諸性質 1-7 がみたされているというのがこの論文の主結果である.

1. $\epsilon_{0,R}(V, \psi) \in R^\times$ は $V$ の同型類だけで定まる.

2. 局所準同型 $h : R \to R'$ に対し, $h(\epsilon_{0,R}(V, \psi)) = \epsilon_{0,R'}(V \otimes_R R', h \circ \psi)$.

3. 表現の短完全列 $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ に対し, $\epsilon_{0,R}(V, \psi) = \epsilon_{0,R}(V', \psi) \cdot \epsilon_{0,R}(V'', \psi)$.

4. $R$ が体なら, $dx$ を $O_K$ の体積が 1 となる $R$ 値の $K$ の Haar 測度とすると, $\epsilon_{0,R}(V, \psi) = \epsilon_{0,R}(V, \psi, dx)$.

5. $V$ の階数が 1 なら, 局所類体論により対応する指標を $\chi : K^\times \to R^\times$ とし, $dx$ を $O_K$ の体積が 1 となる $R$ 値の $K$ の Haar 測度とすると, $\epsilon_{0,R}(V, \psi) = \epsilon_{0,R}(\chi, \psi, dx)$.

6. $a \in K^\times$ に対し, $\psi_a : K \to R^\times$ を $\psi_a(x) = \psi(ax)$ で定め, $\det V$ を, 局所類体論により $\det V$ に対応する $K^\times$ の指標とすると, $\epsilon_{0,R}(V, \psi_a) = \det V(a) \cdot \epsilon_{0,R}(V, \psi)$.

7. $W$ が不分岐なら, $\epsilon_{0,R}(V \otimes W, \psi_a) = \det W(\mathrm{Frob}^{\mathrm{sw}(V)+\mathrm{rank}(V)\cdot(\mathrm{ord}\psi+1)}) \cdot \epsilon_{0,R}(V, \psi)^{\mathrm{rank}(V)}$.

また $L$ を $K$ の有限次分離拡大とし $V$ を $G_L$ の $R$ 係数の表現とすると, 誘導表現

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

の公式

$$\frac{\epsilon_{K,0,R}(\mathrm{Ind}_{G_L}^{G_K} V, \psi)}{\epsilon_{L,0,R}(V, \psi \circ \mathrm{Tr}_{L/K})} = \left( \frac{\epsilon_{K,0,R}(\mathrm{Ind}_{G_L}^{G_K} R, \psi)}{\epsilon_{L,0,R}(R, \psi \circ \mathrm{Tr}_{L/K})} \right)^{\mathrm{rank} V}$$

がなりたつことも示している.

この結果から, 剰余体の標数が $p$ と異なる場合には, 加藤 和也により予想されていた局所 $\epsilon$ 元の存在が導かれる.

局所定数 $\epsilon_{0,R}(V,\psi)$ の定義は次のようにしてなされる. $V$ を tame 部分と wild 部分の直和に分解し, $V$ が tame な場合と完全に wild な場合に分けて考える. $V$ が wild な場合には, 従来の場合には, $\epsilon_{0,R}(V,\psi)$ の明示的な公式が 1 の $p$ 巾乗根を法として知られていた. $R$ の極大イデアルを法としては $\epsilon_{0,R}(V,\psi)$ の値は定まっているので, この公式とあわせることにより, 定義している. したがってこの場合には, 絶対 Galois 群 $G_K$ の分岐群の filtration とその各部分商 $G^v/G^{v+}$ の構造をみることが重要である。ここでは標準同型 $Hom(G^v/G^{v+}, \mathbb{F}_p) \to Hom_{\bar{F}}(N^v, \bar{F})$ が使われる. ここで $N^v$ は剰余体の代数閉包 $\bar{F}$ 上の 1 次元線型空間 $\{a \in \bar{K} | \mathrm{ord}(a) \geq v\}/\{a \in \bar{K} | \mathrm{ord}(a) > v\}$ を表わす.

一方 tame の場合には, 幾何的な方法を使って定義する. 局所体の Galois 群の最大 tame 商は剰余体上の乗法群の基本群の最大 tame 商と同一視できることを用いる. tame な表現 $V$ と対応する層 $\mathcal{F}$ をとり, これと Artin-Schreier 層 $\mathcal{L}$ とのテンソル積のコホモロジー $H_c^1(\mathbb{G}_m, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L})$ への幾何的 Frobenius の作用の行列式を使って定義する. $V$ の階数が 1 のときには, これは通常の Gauss 和と一致する. したがってこの定義は Gauss 和の一般化を幾何的に定義したものと考えることができる.

証明においては, tame な表現 $V$ に対する $\epsilon_{0,R}(V,\psi)$ が well-defined であることと, $V$ が tame な $G_L$ の表現で $L/K$ が wild に分岐するときの誘導表現の公式の証明が特に困難である. ここでは曲線の対称積を使った幾何的な議論により, 証明がなされる. また $V$ が完全に wild な $G_L$ の表現で $L/K$ が wild に分岐するときにも誘導表現の公式の証明には注意深い議論が必要である. ここでは, wild な拡大における分岐群の filtration の変化, 特に標準同型 $Hom(G_K^v/G_K^{v+}, \mathbb{F}_p) \to Hom(N_K^v, \bar{F})$ と $Hom(G^{\psi(v)}0_L/G_L^{\psi(v)+}, \mathbb{F}_p) \to Hom(N_L^{\psi(v)}, \bar{F})$ の関係をみることが大事である.

この論文において, 安田君は局所定数の理論を, より一般のねじれ係数環へと拡張した. その際, 分岐群の Filtration や代数曲線の対称積のエタール・コホモロジーなどについて, の精密な議論を展開している. この拡張は従来の理論の自然な発展であり, 今後の応用も期待させるものである. よって論文提出者 安田 正大 は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.