# 論文の内容の要旨

論文題目

Algebraic structures on quasi-primary states in superconformal algebras
(superconformal 代数の準一次状態における代数構造)

氏名　山本　剛

無限次元 Lie 超代数 $\mathcal{G}$ が次の条件を満たす状況を考える.

(1) ある形式的べき級数の集合 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}[z, z^{-1}]$ が存在して, $\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}$ の元の係数で生成される.

(2) Lie 超代数の積は作用素積展開で書ける. すなわち, 任意の $a, b \in \mathbf{C}[\partial]\mathcal{F}$ の積は

$$[a(z), b(w)] = \sum_j \left(a_{(j)}b\right)(w)\frac{{\partial_z}^j}{j!}\delta(z-w),$$
$$\left(a_{(j)}b\right)(w) = \mathrm{Res}_z[a(z), b(w)](z-w)^j,$$

という形の有限和で書ける.

対 $(a, b)$ に $a_{(j)}b$ を対応させる写像を $a$ と $b$ の積とみなして留数積という. 留数積は一般には非可換, 非結合的である. 留数積を $\mathbf{C}[\partial]\mathcal{F}$ の上の抽象的な積とみなして定式化したものは共形超代数とよばれる. 本論文ではさらに Virasoro 部

分代数の存在を要請する．共形超代数は，一般に無限次元ベクトル空間上の代数構造である．

本論文では第一に，ある条件を満たす共形超代数の別定式化を与えた．この定式化は可換(または反可換)代数を定義し，もし共形超代数が有限生成であれば，有限次元ベクトル空間に実現される．2つの定式化は，射の対応を含めて互いを一意的に決定するという意味で互いに等価である．

この対応は次のようにして得られる．条件を満たす共形超代数 $R$ に対し，部分空間 $\check{R} = \{x \in R | \ L_{(2)}x$ は中心的$\}$ を考える．すると任意の $x \in R$ に対して，$x^j \in \check{R}$ が存在して $x = \sum_{j \in \mathbf{N}} \frac{\partial^j}{j!} x^j$ と分解され，しかも分解は $j > 0$ について $x^j$ に中心的な元を加えるあいまいさを除いて一意的である．$\check{R}$ 上の積を $a_{\langle n \rangle} b = (a_{(n)} b)^0$ で定義すると，これは本論文で与えた定式化を満たす．逆にその定式化を満たす任意の構造が与えられれば，対応する共形超代数 $R$ が一意に存在する．さらに分解 $x = \sum_{j \in \mathbf{N}} \frac{\partial^j}{j!} x^j$ を用いて，射の間にも1対1の対応があることがわかる．

この別定式化を応用して，単純物理的 superconformal 代数の分類が得られる．Virasoro 代数や Neveu-Schwarz 代数，$N = 2$ superconformal 代数，$N = 4$ superconformal 代数などの代数がこの範疇に含まれる．

**定理** 単純物理的 superconformal 代数は，同型を除いて8種類のみ存在する．

証明の概要は次のとおりである．上記の定式化によれば，これらは有限次元ベクトル空間の上に定式化される．共形ウエイトに関する条件から，その構造は Clifford 代数 $\mathrm{Cl}(V, q)$ がある条件を満たして作用する Lie 超代数 $\check{R}$ であることがわかる．その条件から左 $\mathrm{Cl}(V, q)$-加群の射 $\iota : \mathrm{Cl}(V, q) \to \check{R}$ が存在する．Clifford 代数の一般論から，まず $\iota$ の像での代数構造が分類される．分類結果の各々について，それを部分代数にもつ代数系 $\check{R}$ を分類することができる．

単純物理的 superconformal 代数に対応する共形超代数は，次のとおり列挙される: $Vir$, $K_1$, $K_2$, $K_3$, $S_2$, $W_2$, $N_4$, $N_4^\alpha$ および $CK_6$, ただし $\alpha \in \mathbf{C}/\pm 1$ で $\alpha \neq [\pm 1]$. それぞれに対応する Lie 超代数は次のとおりである: $Vir$ は Virasoro 代数，$j = 1, 2, 3$ について $K_j$ は $N = j$ superconformal 代数として知られる無限次元 Lie 超代数，$S_2$ は $N = 4$ superconformal 代数として知られる無限次元 Lie 超代数，$W_2$ は4つの supercharge を持つある無限次元単純 Lie 超代数，$CK_6$ は6つの supercharge を持つある無限次元単純 Lie 超代数，$N_4$ および $N_4^\alpha$ には $K_4'$ として知られる4つの supercharge を持つ無限次元単純 Lie 超代数．$K_4'$ の

ある中心拡大は large $N=4$ superconformal 代数としても知られる.

共形超代数の分類の結果から, 次の事実もわかる.

**定理** Lie 超代数 $Vir$, $K_1$, $K_2$, $K_3$, $S_2$, $W_2$, $CK_6$ について, 物理的作用素積展開を与える Virasoro 部分代数は一意に存在する. Lie 超代数 $K_4'$ について, 物理的作用素積展開を与える Virasoro 部分代数の選び方は 1 パラメータの自由度のみが存在する.

**謝辞** この論文を書くにあたって松尾厚先生に大変お世話になりました. この問題を考えるきっかけを与えてくださるとともに, 論文中で追及した方針を私が放棄しかけた時も, 幾度となく励ましていただきました. また, Shun-Jen Cheng 氏には $N_4^\alpha$ の共形ベクトルを取り替えることについて貴重なコメントをいただきました. 加藤晃史先生, 脇本実先生, 庵原謙治氏, 秦泉寺雅夫氏には議論のために貴重な時間を割いていただき, さらに有益なコメントをいただきました. この場を借りて深く感謝します.