論文審査の結果の要旨

氏　名　　山　本　　剛

リーマン面上の場の理論である共形場の理論は, 数理物理学の主要なテーマであって, その数学的に厳密な基礎付けを与えることは重要な課題である. これを代数的に扱うためには, 場の演算子と演算子積展開のきちんとした定式化が必要になり, その試みが頂点作用素代数 (vertex operator algebra) や共形超代数 (conformal superalegbra) である. これらは, 無限個の非可換・非結合的な積を持ち, 無限個の複雑な関係式によって定義される無限次元の代数である. このように複雑な代数構造では, 公理を満たすことの確認だけでも非自明な作業となる. 従って, そのような代数系を分類することは一般に非常に困難である.

共形超代数の定義を述べる. R を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付き K-線形空間で, 可算個の積 $(n): R\otimes R \to R,\quad (n\in\mathbb{N})$, と線形変換 $\partial: R\to R$ が与えられているとする. また, $L\in R^{\mathrm{even}}$ とする. $(R, \{(n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \partial, L)$ が以下の条件を満たすとき共形超代数 (conformal superalgebra) という:

(C) 任意の $a, b, c\in R$ に対し,

(C0) 十分大きな $n\in\mathbb{N}$ に対して $a_{(n)}b = 0$,

(C1) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $(\partial a)_{(n)}b = -na_{(n-1)}b$,

(C2) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$a_{(n)}b = (-1)^{p(a)p(b)}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+n+1}\partial^{(j)}b_{(n+j)}a,$$

(C3) 任意の $m, n\in\mathbb{N}$ に対して

$$a_{(m)}(b_{(n)}c) = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}b\right)_{(n+m-j)}c + (-1)^{p(a)p(b)}b_{(n)}(a_{(m)}c).$$

(V) $L\in R$ は次を満たす:

(V1) $L_{(0)}L = \partial L$, $L_{(1)}L = 2L$, $L_{(2)}L = 0$

(V2) R 上の作用素として $L_{(0)} = \partial$ であり, $L_{(1)}$ は対角化可能.

論文提出者山本剛は, 「単純な共形超代数の分類せよ」という基本問題を物理的 (physical) と呼ばれる重要なクラスについて研究し, 完全な解答を与えた.

本論文で鍵となる最初のアイデアは

- 共形超代数 R に対し, その "deformation retract" とも言うべき, より取り扱い易い代数系 $\check{R}$ を定義する.

もし共形超代数が有限生成であれば, $\check{R}$ は有限次元ベクトル空間に実現される $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付き可換代数となる. $\check{R}$ の公理系 P0,P2,P3,PV は紙数が足りないので省略するが, R と $\check{R}$ は, 射の対応を含めて互いを一意的に決定するという意味で互いに等価 (圏同値) であることが証明できる.

さて, 共形超代数 R について, 対応する $\check{R}$ が $L_{(1)}$ の固有値 (共形ウエイト) $2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}$ に対応する部分空間 $\mathbb{C}L$, V, A, F の直和に分解できるとき, R は物理的 (physical) であるという.

本論文で鍵となる第二のアイデアは

- R が物理的という仮定の下で, V 上の Clifford 代数 $\mathrm{Cl}(V, q)$ が, $\check{R}$ に自然に作用する.

この作用を利用して, $\check{R}$ の, 従って R の次のような分類が得られた. 添字は対応する $\check{R}$ における V の次元を表している:

定理 単純物理的共形超代数は, 次のいずれかに同型である : Vir, K_1, K_2, K_3, S_2, W_2, N_4, N_4^α および CK_6, ただし $\alpha \in \mathbb{C}/\pm 1$ で $\alpha \neq [\pm 1]$.

証明の概要は次のとおり. 物理的という条件下では共形ウエイトに関する条件から, $\check{R}$ は Clifford 代数 $\mathrm{Cl}(V, q)$ が一定の仕方で作用する "Lie" 超代数としての構造を持つことがわかる. 左 $\mathrm{Cl}(V, q)$-加群の射 $\iota : \mathrm{Cl}(V, q) \to \check{R}$ の存在と Clifford 加群の一般論から, まず ι の像での代数構造が分類され、各々について, それを部分代数にもつ代数系 $\check{R}$ を分類することができる.

共形超代数の分類の結果から, 次の事実もわかる.

定理 共形超代数からそれに付随する "Lie" 超代数への対応は殆ど 1 対 1 であるが, N_4 と N_4^α については同じ Lie 超代数 K_4' に対応する.

定理 Lie 超代数 Vir, K_1, K_2, K_3, S_2, W_2, CK_6 について, 物理的作用素積展開を与える Virasoro 部分代数は一意に存在する. Lie 超代数 K_4' について, 物理的作用素積展開を与える Virasoro 部分代数の選び方は 1 パラメータの自由度のみが存在する.

実は, 物理的超共形代数を分類したと称する論文が Victor Kac によって数年前に提出されていた. 論文提出者はその証明の論理に誤りがあり, 分類結果に見落とし (N_4^α のクラス) があることを発見した. Kac 自身, 論文提出者への私信において自身の誤りを認めている. このように, 論文提出者の研究は共形場理論の代数的基礎づけである共形超代数について, 従来の結果の誤りを正し, 独自の方法で分類を完成させた点で, 非常に価値の高いものである. よって, 論文提出者山本剛は, 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める.