論文内容の要旨

論文題目 On the Metric Property of Multimodal Interval Maps and Density of Axiom A
(区間多峰写像の計量的性質と公理Aの稠密性について)

氏名 沈 維孝 (Shen Weixiao)

コンパクト多様体 M からそれ自身への写像 f が与えられたとき、$z \in M$ に対して、その軌道 $\{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ の性質を調べることは（離散）力学系理論の課題である。多くの自然現象を力学系で表せることは昔から知られている。

一次元力学系では区間（或は円周）写像を考える。区間に高次元多様体にない順序関係、affine 構造などが入ってるおかげで、色々な道具を用いることは可能である。一方、これらの写像は研究に十分値する豊富な力学系をもっている。高次元力学系のいくつかの面白い例が一次元力学系に帰着できることも知られている。

１９８０年代から、Sullivan は複素解析的手法を実一次元写像の繰り込み理論に用いた。それ以来、複素解析的手法は一次元力学系、特に単峰写像の場合に重要な進展をもたらした。

本論文では、区間写像の力学系において次の問題を考える。

予想 1 すべての自然数 r に対して、すべての写像 $f \in C^r([0,1],[0,1])$ は公理 A を満たす C^r 写像によって C^r 位相で近似できる。

ここで、C^1 写像 $f:[0,1] \to [0,1]$ が公理 A を満たすとは、次の二つを条件を満たすことである。

(A1) f のすべての周期点は双曲的である；

(A2) $B(f)$ を f のすべての吸引的周期点の吸引領域とすると、$\Omega = [0,1] - B(f)$ は双曲的になる。すなわち、ある定数 $C > 0$ と $\lambda > 1$ があって、すべての $x \in \Omega$ と自然数 n に対して、次が成り立つ:

$$|(f^n)'(x)| \geq C\lambda^n.$$

この予想は一次元力学系において最も重要な問題のひとつである。この予想が正しければ、位相幾何学的意味での「ほとんとすべて」の力学系の特徴づけが得られる。さらに、この予想が正しければ、$r \geq 2$ のとき、C^r-構造安定な力学系は $C^r([0,1],[0,1])$ の中で稠密であることも分かる。

$r=1$ のとき、この予想は Jakobson により純粋に実の手法で示された。最近、Blokh と Misiurewicz は $r=2$ の場合を考えて、予想 1 より弱い結果を得た。彼らは次の性質をもつ写像 f が $C^2([0,1],[0,1])$ の中で稠密であることを示した: f の各分岐点 c は吸引的周期点の吸引領域に入るか、またはその極限集合 $\omega(c)$ は極小集合である。しかし $r\geq 2$ のとき、純粋に実の手法では予想 0 を解くのは極めて困難なようである。

実際、この予想を解くことは最近の複素力学系の研究の主な目標のひとつになっている。複素力学系の手法を用いて、Graczyk, Swiatek, Lyubich らは公理 A が実二次多項式の族の中で稠密であることを示した。その後、彼らの結果及び Levin と van Strien のある定理を用いて、Kozlovski はすべての自然数 r に対して f が単峰写像のとき上の予想を解決した。

本論文では上の予想を $r=2$ とすべての $f\in C^2([0,1],[0,1])$ に対して証明する。主結果は

主定理 公理 A は $C^2([0,1],[0,1])$ の中で開かつ稠密である。従って、C^2-構造安定な写像はこの空間の中で開かつ稠密である。

この証明の過程で以下に述べるような定理 1 − 6 も得た。主定理の証明の方針を述べる前に、いくつかの定義の準備をする。

区間写像の空間: いくつかの区間写像の空間を定義する。$\mathcal{N}$ を $[0,1]$ からそれ自身への C^3 写像で次を満たすものの全体とする:

1) $f(\{0,1\})\subset\{0,1\}$;

2) f の各分岐点 c が $(0,1)$ にあり、その点のある近傍 U で、

$$f(x)=a_c(x-c)^2+f(c)$$

が成り立つ。ただし、a_c は 0 でない定数である。

すべての自然数 n に対して、$\mathcal{G}_n^\omega$ を次の条件を満たす写像

$$f:(\bigcup_{j=0}^{m}J_j)\cup(\bigcup_{i=2}^{n}I_i)\to\bigcup_{i=1}^{n}I_i \tag{1}$$

の全体とする:

(C1) $I_i(1\leq i\leq n)$ は互いに交わらない開区間で、$J_j(0\leq j\leq m)$ は I_1 に含まれる互いに交わらない開区間である;

(C2) 各 $1\leq j\leq m$ に対して、ある $1\leq l=l(j)\leq n$ があって、$f:J_j\to I_l$ は実解析微分同相である;

(C3) 各 $U\in\{J_0,I_2,I_3,\cdots,I_n\}$ に対して、ある $1\leq k=k(U)\leq n$ があって、$f|U$ は $x\mapsto\phi((x-c_U)^2)$ という形に書ける。ここで、 c_U は U の中点であり、$\phi=\phi_U$ は I_k の上への実解析微分同相写像である;

(C4) f の各分岐点 c と各自然数 k に対して、$f^k(c)$ は f の定義域に入る、さらに $\omega(c)$ は f のすべての分岐点を含む極小集合である;

(C5) f のすべての周期点は反発的である。

(1) のような f に対して、集合 $\bigcup_{i=1}^n I_i$ をその写像の range と呼ぶ。$\mathcal{N}$ に属する写像 f の range を $[0,1]$ とする。$f\in\mathcal{N}\cup(\bigcup_{n=1}^\infty\mathcal{G}_n^\omega)$ をひとつ取って固定しよう。その range に含まれる開集合 I が nice とは、I のすべての境界点 x とすべての自然数 k に対して、$f^k(x)$ が定義できる限り、$f^k(x)\notin I$ が成り立つことである。f のすべての再帰的分岐点 c に対して、その点を含む任意に小さい nice な開区間が存在する。適当な nice な開集合への first return map を調べて、もとの写像 f の性質を理解する手法はいわゆる “繰り込み理論” で、最近の一次元力学系の研究で良く使われる。

われわれはある種の特別な first return map に注目する。nice な開集合 T が与えられたとき、T に戻る点の集合を D_T と書く。任意な $x\in D_T$ に対して、D_T の x を含む連結成分を $\mathcal{L}_x(T)$

と書く。c を f の再帰的な分岐点とし、それを含む十分小さい nice な開区間を I とする。$[c]$ を $\omega(c') = \omega(c) \ni c, c'$ となるような f の分岐点の集合とし、V を $[c]$ と交わる $I \cup D_I$ の連結成分の和集合とする。V が nice になることに注意しよう。U を D_V の c の forward orbit と交わるような連結成分の和集合とする。われわれは first return map $B_I : U \cap V \to V$ に注目し、この写像のことを I に付随する「real box mapping」と呼ぶことにする。

主定理の証明は四つのステップに分かれる:実力学系の解析;適当な first return map の polynomial-like 拡張;実多項式の複素反復;摂動。

ステップ1、実力学系の解析。

以下、c を f の再帰的な分岐点とする。c を含む nice な開区間 I は C-nice とは、すべての $f^n(c) \in I$ となるような自然数 n に対して、$\mathcal{L}_{f^n(c)}(I)$ は I にコンパクトに含まれて、$I - \mathcal{L}_{f^n(c)}(I)$ の各連結成分の長さは $C|\mathcal{L}_{f^n(c)}(I)|$ 以上である。f はが c で large bound を持つとは、任意定数 $C > 0$ に対して、c を含む C-nice な開区間が存在するすることである。f は c で essentially bounded geometry をもつとは、ある定数 $C > 0$ があって、c を含み、c に関して対称な nice な開区間 I について、$|I| \le C|\mathrm{Comp}_c(D_I)|$ が常に成り立つことである。

定理1 (実アプリオリ評価) $\omega(c)$ が極小集合であると仮定する。ある定数 $C > 0$ があって、c を含む任意に小さい開区間 I で $(1+C)I - I$ が $\omega(c)$ と交わらないものが存在する。

定理2 f は c で large bound を持つか、または essentially bounded geometry をもつ。

定理3 $\omega(c)$ が極小集合でなければ、f は c で large bound を持つ。

さらに、f が essentially bounded geometry を持つ場合、その幾何学性質をもっと詳しく分析する。その幾何的構造の有界性は saddle node type の long central cascade が存在するときのみ崩れることも分かる。これらの分析から、次の結果が得られる。

定理4 (剛性) $f, \tilde{f} \in \mathcal{G}_n^3$ はそれぞれ essentially bounded geometry をもち、組合せ的同値であると仮定する。このとき、f と $\tilde{f}$ の分岐点の軌道の間に擬対称共役が存在する。

予想として、上の定理は「essentially bounded geometry を持つ」という条件がなくても成り立つ。この予想を剛性予想と呼ぶことにしよう。恐らく、剛性予想を示せれば、予想1も示せるであろう。$n = 1$ のとき、剛性予想が正しいことは Graczyk, Swiatek, Lyubich らにより示された。これは最近の一次元力学系の研究でもっとも重要な結果のひとつであり、予想1の単峰写像の場合における解決の中でも重要な位置を占めている。

ステップ2、Polynomial-like 拡張。

定理5 (Polynomial-like 拡張) $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n^{\omega}$ とし、c をその分岐点とする。任意の $\epsilon > 0$ に対し、c を含み、c に関して対称な nice な開区間 I があって、次の条件を満たす:

1) その長さが ϵ 以下であり、

2) I に付随する real box mapping は実軸に関して対称な(複素解析的)polynomial-like box mapping に拡張できる。

ここで、polynomial-like box mapping とは次の条件を満たす複素解析的写像 $F : (\bigcup_{i=0}^{r} U_j) \cup (\bigcup_{i=2}^{n} V_i) \to \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ である: 各 V_i は互いに交わらない単連結領域であり、各 U_j は V_1 にコンパクトに含まれる互いに交わらない単連結領域であり、F の定義域の各連結成分に制限したものはある V_i の上への branched covering であり、$F|U_0$ と $F|V_i (i \ge 2)$ の degree が 2 で、$F|U_j (j \ge 1)$ は同相写像である。

この定理はステップ1で得られた結果と Lyubich-Yampolsky の方法を用いて示された。この定

理は $f \in \mathcal{G}_n^\omega$ の力学系の研究を多項式の力学系の研究に帰着させる。事前に期待されたように、この定理を示すとともに、複素アプリオリ評価の存在も証明された。

ステップ３、実多項式の複素反復。

定理６（Julia 集合にサポートをもつ擬等角変形の非存在）f を実多項式とし、その分岐点はすべて実軸にあって、order が偶数と仮定する。f は Julia 集合上に invariant line field をもたない。

ここで、f の Julia 集合は f の双曲的反発周期点の集合の閉包である。Invariant line field とは、f で不変な可測的 Beltrami 微分である。定理 3 の主張は言い替えれば、f で不変な可測的 Beltrami 微分は Julia 集合の（Lebesgue 測度について）ほとんと至る所で 0 であることを意味する。

本論文で与えた証明はを複素アプリオリ評価用いる。実は、この定理を示すために、その評価は必ずしも必要でない。実アプリオリ評価のみを用いて、この定理を示すことも可能である。

ステップ４、摂動。

主定理を示すために、$f \in \mathcal{N}$ をひとつ固定して、それが再帰的な分岐点 c をもつならば、C^2-構造安定にならないことを示せばよい。もし f は c で large bound をもつなら、Blokh と Misiurewicz の手法（実の手法）によってこの主張を示すことが容易である。もし f は c で essentially bounded geometry をもつならば、複素の手法（定理１、２、３）を用いて、f のいくらでも近くに、f と同じ分岐点をもつ写像 h が存在し、h が c を再帰的な分岐点として持ち、その点で large bound をもつことが示される。再び、実の手法を用いれば、主張の証明はできる。